T_0, T_1 a T_2-priestory

12. novembra 2024

T_0 a T_1-priestory

Definícia

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor.
Hovoríme, že $(X, \mathcal{T})$ je T_0*-priestor*, ak pre ľubovoľné $x, y \in X$ také, že $x \neq y$, existuje otvorená množina U taká, že $x \in U$ a $y \notin U$ alebo existuje otvorená množina V taká, že $x \notin V$ a $y \in V$.
Hovoríme, že $(X, \mathcal{T})$ je T_1*-priestor*, ak pre ľubovoľné $x, y \in X$ také, že $x \neq y$, existuje otvorená množina U taká, že $x \in U$, $y \notin U$.

- T_1-priestor $\Rightarrow$ T_0-priestor
- Sierpińského priestor je T_0-priestor, ktorý nie je T_1-priestorom.

T_0 a T_1-priestory

Tvrdenie

Ak X je T_0-priestor (T_1-priestor) a S je podpriestor priestoru X, tak aj S je T_0 (T_1).

Tvrdenie

Nech pre každé $i \in I$ je X_i T_0-priestor (T_1-priestor). Potom aj súčin $\prod_{i\in I} X_i$ je T_0-priestor (T_1-priestor).

Ak navyše predpokladáme, že všetky X_i sú po dvoch disjunktné, tak topologický súčet $\coprod_{i\in I} X_i$ je T_0-priestor (T_1-priestor).

Tieto dve triedy priestorov sú uzavreté vzhľadom na jemnejšie topológie.

T_1-priestory

Tvrdenie

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné.

(i) *Priestor X je T_1-priestor.*

(ii) *Pre každý bod $x \in X$ je množina $\{x\}$ uzavretá.*

(iii) *Pre každý bod $x \in X$ platí $\overline{\{x\}} = \{x\}$.*

(iv) *Ľubovoľná podmnožina $A \subseteq X$ sa rovná prieniku všetkých otvorených množín, ktoré ju obsahujú.*

(v) *Ľubovoľná podmnožina $B \subseteq X$ sa rovná zjednoteniu všetkých uzavretých množín obsiahnutých v B.*

T_1-priestory

Tvrdenie

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

- *X je T_1-priestor.*
- *Každá konštantná sieť v X má práve jednu limitu.*
- *Každý hlavný ultrafilter na množine X má práve jednu limitu.*

Hausdorffovské priestory

Definícia

Topologický priestor $(X, \mathcal{T})$ sa nazýva *hausdorffovský priestor* alebo *T_2-priestor*, ak pre ľubovoľné $x, y \in X$ také že $x \neq y$ existujú disjunktné otvorené množiny $U \ni x$, $V \ni y$.

$$(\forall x, y \in X)[x \neq y \Rightarrow (\exists U, V \in \mathcal{T})(x \in U \wedge y \in V \wedge U \cap V = \emptyset)]$$

- T_2-priestor $\Rightarrow$ T_1-priestor
- Pre nekonečnú množinu X priestor $(X, \mathcal{T}_{cof})$ je T_1 nie je T_2.

Hausdorffovské priestory

- Metrické priestory sú T_2-priestory.
- Topológia odvodená od lineárneho usporiadania dáva T_2-priestor.

Topológia odvodená od usporiadania

Definícia

Nech $(X, \leq)$ je lineárne usporiadaná množina. Pre $a, b \in X$ označme

$$\begin{aligned} (a, b) &= \{x \in X; a < x < b\}, \\ (-\infty, b) &= \{x \in X; x < b\}, \\ (a, \infty) &= \{x \in X; a < x\}. \end{aligned}$$

Ak $|X| \geq 2$, tak množina

$$\mathcal{S} = \{(-\infty, b), (a, \infty); a, b \in X\}$$

tvorí subbázu topológie na množine X. Túto topológiu nazveme *topológia odvodená od usporiadania* $\leq$.

Topológia odvodená od usporiadania

$$\mathcal{S} = \{(-\infty, b), (a, \infty); a, b \in X\}$$

Báza určená subbázou $\mathcal{S}$ je

$$\mathcal{B} = \{(a, b), (-\infty, b), (a, \infty); a, b \in X\}$$

Hausdorffovské priestory

Tvrdenie

Nech $\mathcal{T}_{1,2}$ sú topológie na tom istom priestore, pričom $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. Ak $(X, \mathcal{T}_1)$ je hausdorffovský priestor, tak aj $(X, \mathcal{T}_2)$ je hausdorffovský.

Hausdorffovské priestory

Tvrdenie

Nech X je hausdorffovský priestor a S je podpriestor priestoru X. Potom aj S je hausdorffovský.

Tvrdenie

Nech pre každé $i \in I$ je priestor X_i hausdorffovský. Potom aj topologický súčin $\prod_{i \in I} X_i$ je hausdorffovský.

Hausdorffovské priestory

Definícia

Majme systém zobrazení $\{f_i\colon X \to X_i; i \in I\}$. Hovoríme, že tento systém *oddeľuje body* ak pre ľubovoľné $x_{1,2} \in X$ také, že $x_1 \neq x_2$ existuje $i \in I$, pre ktoré $f_i(x_1) \neq f_i(x_2)$.

$$(\forall x_1, x_2 \in X)[x_1 \neq x_2 \Rightarrow (\exists i \in I) f_i(x_1) \neq f_i(x_2)]$$

Tvrdenie

Nech pre každé $i \in I$ je Y_i hausdorfovský priestor a $\{f_i\colon X \to Y_i\}$ je systém zobrazení, ktorý oddeľuje body. Nech X má iniciálnu topológiu vzhľadom na $\{f_i; i \in I\}$. Potom aj X je hausdorffovský.

Hausdorffovské priestory

Tvrdenie

Nech X je topologický priestor. Priestor X je hausdorffovský práve vtedy, keď množina

$$\Delta = \{(x, x); x \in X\}$$

je uzavretá v topologickom súčine $X \times X$.

Hausdorffovské priestory

Tvrdenie

Nech X, Y sú topologické priestory pričom Y je Hausdorffovský. Nech $f, g\colon X \to Y$ sú spojité zobrazenia. Potom množina

$$\{x \in X; f(x) = g(x)\}$$

tých bodov, kde sa f a g zhodujú, je uzavretá v X.

Dôsledok

Nech X, Y sú topologické priestory pričom Y je Hausdorffovský. Nech D je hustá množina v X. Ak $f, g\colon X \to Y$ sú spojité zobrazenia také, že $f|_D = g|_D$, tak platí $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in X$.

$$f|_D = g|_D \qquad \Rightarrow \qquad f = g.$$