Regulárne a úplne regulárne priestory

12. novembra 2024

Regulárne priestory

Definícia

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor. Priestor X nazývame *regulárny,* ak pre ľubovoľný bod $b \in X$ a ľubovoľnú uzavretú množinu C takú, že $b \notin C$, existujú disjunktné otvorené množiny U, V tak, že $b \in U$ a $C \subseteq V$.

Regulárny priestor, ktorý je navyše T_1, nazveme T_3*-priestor*.

- Ekvivalentnú definíciu T_3-priestoru dostaneme, ak namiesto T_1 požadujeme T_2.
- Ak X je T_3-priestor, tak X je hausdorffovský.

Regulárne priestory

Tvrdenie

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor a $\mathcal{B}$ je nejaká báza topológie $\mathcal{T}$. Priestor $(X, \mathcal{T})$ je regulárny práve vtedy, keď pre ľubovoľný bod $b \in X$ a pre ľubovoľné bázové okolie $V \ni b$, $V \in \mathcal{B}$, existuje bázová množina $U \in \mathcal{B}$ taká, že $b \in U \subseteq \overline{U} \subseteq V$.

$$(\underset{V \ni b}{\forall} V \in \mathcal{B})(\exists U \in \mathcal{B})(b \in U \subseteq \overline{U} \subseteq V) \tag{1}$$

Dôsledok

Nech X je topologický priestor. Priestor X je regulárny práve vtedy, keď každý bod x má bázu okolí pozostávajúcu z uzavretých množín.

Regulárne priestory

Tvrdenie

Nech $\mathcal{S}$ je subbáza topologického priestoru X. Priestor X je regulárny ak pre ľubovoľný bod $b \in X$ a pre každé jeho subbázové okolie V, t.j. pre $b \in V \in \mathcal{S}$, existuje otvorená množina U taká, že $b \in U \subseteq \overline{U} \subseteq V$

$$(\underset{V \ni b}{\forall} V \in \mathcal{S})(\exists U \in \mathcal{T})(b \in U \subseteq \overline{U} \subseteq V) \tag{2}$$

Regulárne priestory

Tvrdenie

Ak X je regulárny priestor a S je jeho podpriestor, tak aj S je regulárny.
Ak X je T_3-priestor, tak aj každý jeho podpriestor je T_3.

Regulárne priestory

Tvrdenie

Ak X_i je regulárny priestor pre každé $i \in I$, tak aj topologický súčin $\prod_{i\in I} X_i$ je regulárny.
Ak všetky X_i sú T_3-priestory, tak aj $\prod_{i\in I} X_i$ je T_3-priestor.

Ekvivalentná podmienka k spojitosti:

$$\overline{f^{-1}[B]} \subseteq f^{-1}[\overline{B}]$$

Regulárne priestory

$$T_3 \Rightarrow T_2$$
$$T_2 \not\Rightarrow T_3$$

Príklad

Príklad Hausdorffovského priestoru, ktorý nie je regulárny: Na množine $\mathbb{R}$ topológia zadaná tak, že báza okolí nuly pozostáva z množín $(-\varepsilon, \varepsilon) \setminus C$, kde $C = \{\frac{1}{n+1}; n \in \mathbb{N}\}$. (Ostatné body majú bázu okolí ako v euklidovskej topológii.) Bod 0 a uzavretá množina C sa nedajú oddeliť otvorenými množinami.

Úplne regulárne a tichonovovské priestory

Definícia

Topologický priestor X sa nazýva *úplne regulárny,* ak pre ľubovoľný bod $b \in X$ a uzavretú množinu $C \subseteq X$ takú, že $b \notin C$ existuje spojité zobrazenie $f\colon X \to \mathbb{R}$ také, že $f(b) = 1$ a $f|_C = 0$.
Úplne regulárny T_1-priestor nazývame $T_{3\frac{1}{2}}$*-priestor* alebo tiež *tichonovovský priestor*.

Ekvivalentnú definíciu by sme dostali, ak by sme požadovali zobrazenie do $I = \langle 0, 1\rangle$ namiesto do $\mathbb{R}$.

Úplne regulárne a tichonovovské priestory

- Máme spojité zobrazenie $f\colon X \to \mathbb{R}$ také, že $f(b) = 1$ a $f|_C = 0$.
- Potom vieme dostať $g\colon X \to \langle 0, 1\rangle$ s tými istými vlastnosťami.

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{ak } f(x) < 0, \\ 1 & \text{ak } f(x) > 1, \\ g(x) & \text{inak}, \end{cases}$$

Úplne regulárne a tichonovovské priestory

Ak $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ sú spojité zobrazenia, tak aj zobrazenia $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\max\{f,g\}$, $\min\{f,g\}$ sú spojité.
Zloženie spojitých zobrazení:

$$\langle f, g\rangle\colon X \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$\max\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Úplne regulárne a tichonovovské priestory

Príklad

Každý metrizovateľný priestor je tichonovovský priestor.
Ak máme bod b a uzavretú množinu také, že $b \notin C$:

$$f(x) = \frac{d(x, C)}{d(b, C)}$$

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a); a \in A\}$$
$$x \in \overline{A} \qquad \Leftrightarrow \qquad d(x, A) = 0$$

Úplne regulárne a tichonovovské priestory

Tvrdenie

Nech $(X,\mathcal{T})$ *je topologický priestor a* $\mathcal{S}$ *je nejaká subbáza topológie* $\mathcal{T}$*. Priestor* $(X,\mathcal{T})$ *je úplne regulárny práve vtedy, keď pre každý bod* b *a pre každé okolie* V *také, že* $b \in V \in \mathcal{S}$ *existuje funkcia* $f\colon X \to I$ *taká, že*

$$f(b) = 1 \qquad a \qquad f|_{X \setminus V} = 0.$$

Úplne regulárne a tichonovovské priestory

Tvrdenie

Každý podpriestor úplne regulárneho priestoru je úplne regulárny. Každý podpriestor $T_{3\frac{1}{2}}$-priestoru je $T_{3\frac{1}{2}}$-priestor.

Tvrdenie

Súčin ľubovoľného systému úplne regulárnych priestorov je úplne regulárny. Súčin $T_{3\frac{1}{2}}$-priestorov je $T_{3\frac{1}{2}}$-priestor.

Tichonovove kocky

Definícia

Označme ako $I = \langle 0, 1 \rangle$ jednotkový interval s obvyklou topológiou. Ľubovoľnú mocninu I^A tohoto priestoru nazývame *Tichonovova kocka*.

Veta

Nech X je topologický priestor. Priestor X je $T_{3\frac{1}{2}}$-priestor práve vtedy, keď X je homeomorfný s podpriestorom nejakej Tichonovovej kocky I^A.

Tichonovove kocky a kompaktnosť

Neskôr bude (do istej miery) podobný výsledok pre kompaktnosť:

- Priestor X je úplne regulárny T_2-priestor $\Leftrightarrow$ X je homeomorfný s podpriestorom priestoru $\langle 0,1\rangle^A$ (pre nejaké A).
- Priestor X je kompaktný T_2-priestor $\Leftrightarrow$ X je homeomorfný s **uzavretým** podpriestorom priestoru $\langle 0,1\rangle^A$ (pre nejaké A).