Normálne priestory

19. novembra 2024

Definícia

Definícia

Topologický priestor X sa nazýva *normálny*, ak pre ľubovoľné disjunktné uzavreté množiny A, B existujú disjunktné otvorené množiny U, V tak, že $A \subseteq U$ a $B \subseteq V$.
Priestor X nazveme *T_4-priestor*, ak X je normálny T_1-priestor.

Tvrdenie

Ak X je T_4-priestor, tak X je hausdorffovský.

Ekvivalentná podmienka

Definícia

Topologický priestor X sa nazýva *normálny*, ak pre ľubovoľné disjunktné uzavreté množiny A, B existujú disjunktné otvorené množiny U, V tak, že $A \subseteq U$ a $B \subseteq V$.

Tvrdenie

Nech X je topologický priestor. Priestor X je normálny práve vtedy, keď pre ľubovoľné množiny $C \subseteq O \subseteq X$, kde C je uzavretá a O je otvorená, existuje otvorená množina U taká, že

$$C \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq O.$$

Metrizovateľné priestory sú normálne

Každý metrický priestor je normálny.

$$x \in A \Rightarrow x \notin B \Rightarrow d(x, B) > 0$$

$$r_x = \frac{d(x, B)}{3} \qquad U_x = B(x, r_x)$$

$$y \in B \Rightarrow y \notin A \Rightarrow d(y, A) > 0$$

$$r'_y = \frac{d(y, A)}{3} \qquad V_y = B(y, r'_y)$$

$$U = \bigcup_{x \in A} U_x \qquad \text{a} \qquad V = \bigcup_{y \in B} V_y$$

Uzavretý podpriestor

Neskôr uvidíme, že trieda normálnych priestorov:

- nie je uzavretá vzhľadom na podpriestory (nie je dedičná);
- nie je uzavretá vzhľadom na súčiny.

Tvrdenie

Ak X je normálny priestor a S je jeho uzavretý podpriestor, tak aj S je normálny.

Podpriestory a súčiny

Trieda normálnych priestorov:

- je uzavretá vzhľadom na uzavreté podpriestory;
- **nie je** uzavretá vzhľadom na podpriestory;
- **nie je** uzavretá vzhľadom na súčiny.

Ekvivalentná charakterizácia – doplnky

Topologický priestor $(X, \mathcal{T})$ je normálny práve vtedy, keď:

- Pre ľubovoľné disjunktné uzavreté množiny A, B existujú disjunktné otvorené množiny U, V tak, že $A \subseteq U$ a $B \subseteq V$.
- Pre ľubovoľné otvorené podmnožiny $U, V \subseteq X$ také, že $U \cup V = X$ existujú uzavreté množiny $C, D \subseteq X$ tak, že $C \subseteq U$, $D \subseteq V$ a $C \cup D = X$.

Spojitý obraz, spočítateľná báza topológie

Tvrdenie

Nech $f : X \to Y$ je spojitá uzavretá surjekcia a X je normálny priestor. Potom aj Y je normálny priestor.

Tvrdenie

Každý regulárny priestor vyhovujúci druhej axióme spočítateľnosti je normálny.

Urysohnova lema

Veta (Urysohnova lema)

Nech X je normálny priestor a A, B sú disjunktné uzavreté množiny v X. Potom existuje spojitá funkcia $f\colon X \to \langle 0, 1\rangle$ taká, že

$$A \subseteq f^{-1}[\{0\}] \qquad a \qquad B \subseteq f^{-1}[\{1\}].$$

$$f|_A = 0 \qquad \text{a} \qquad f_B = 1$$

Urysohnova lema

Lema

Nech X je neprázdny topologický priestor a D je hustá podmnožina v $(0,1)$. Nech pre každé $t \in D$ máme otvorenú podmnožinu U_t priestoru X, pričom pre každé $s, t \in D$ také, že $s < t$ platí

$$\overline{U_s} \subseteq U_t.$$

Potom predpis

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{t \in D; x \in U_t\} & ak\ x \in \bigcup\limits_{s \in D} U_s, \\ 1 & ak\ x \notin \bigcup\limits_{s \in D} U_s. \end{cases}$$

určuje spojité zobrazenie $f\colon X \to \langle 0, 1\rangle$.

Urysohnova lema

Lema

Potom predpis

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{t \in D; x \in U_t\} & ak\ x \in \bigcup_{s \in D} U_s, \\ 1 & ak\ x \notin \bigcup_{s \in D} U_s. \end{cases}$$

určuje spojité zobrazenie $f\colon X \to \langle 0, 1 \rangle$.
Navyše platí

$$f^{-1}[\{0\}] = \bigcap_{t \in D} U_t$$

$$f^{-1}[\{1\}] = X \setminus \left(\bigcup_{t \in D} U_t \right)$$

Urysohnova lema

Dôsledok

Každý T_4-priestor je $T_{3\frac{1}{2}}$-priestor.

Sierpińského priestor S normálny. Nie je úplne regulárny ani regulárny.

Tietzeho veta

Veta (Tietze)

Nech X je normálny topologický priestor a $A \subseteq X$ je uzavretá podmnožina. Ak $f\colon A \to \mathbb{R}$ je spojité zobrazenie, tak existuje spojité zobrazenie $F\colon X \to \mathbb{R}$ také, že

$$F|_A = f.$$

Lema

Nech X je normálny priestor a C je uzavretá podmnožina v X. Nech $f\colon C \to \mathbb{R}$ je spojitá funkcia a $c > 0$ je reálna konštanta taká, že $|f(x)| < c$ pre všetky $x \in C$. Potom existuje spojitá funkcia $g\colon C \to \mathbb{R}$ taká, že $|g(x)| \leq \frac{1}{3}c$ pre všetky $x \in X$ a $|f(x) - g(x)| \leq \frac{2}{3}c$ pre všetky $x \in C$.

$$(\forall x \in X)|g(x)| \leq \frac{1}{3}c$$

Tietzeho veta

Lema

Nech X je normálny priestor a C je uzavretá podmnožina v X. Nech $f\colon C \to \mathbb{R}$ je spojitá funkcia a $c > 0$ je reálna konštanta taká, že $|f(x)| < c$ pre všetky $x \in C$. Potom existuje spojitá funkcia $g\colon C \to \mathbb{R}$ taká, že $|g(x)| \leq \frac{1}{3}c$ pre všetky $x \in X$ a $|f(x) - g(x)| \leq \frac{2}{3}c$ pre všetky $x \in C$.

$$(\forall x \in X)|g(x)| \leq \frac{1}{3}c$$
$$(\forall x \in C)|f(x) - g(x)| \leq \frac{2}{3}c$$