Kompaktnosť

20. novembra 2024

Kompaktné priestory

Definícia

Ak $\mathcal{C}$ je pokrytie priestoru X, tak systém $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C}$ sa nazýva *podpokrytie* pokrytia $\mathcal{C}$, ak aj $\mathcal{S}$ je pokrytím t.j. ak $\bigcup \mathcal{S} = X$.

Definícia

Topologický priestor X sa nazýva *kompaktný*, ak pre každé otvorené pokrytie priestoru X existuje konečné podpokrytie.
Podmnožinu K v topologickom priestore X nazveme *kompaktnou*, ak K s relatívnou topológiou je kompaktný priestor. (Ekvivalentne: Ľubovoľné pokrytie množiny K otvorenými podmnožinami priestoru X)

Príklady

- Každý konečný priestor je kompaktný.
- Priestory $\mathbb{R}$ a $(0,1)$ nie sú kompaktné.

Tvrdenie

Interval $I = \langle 0, 1\rangle$ s obvyklou topológiou je kompaktný.
Každý uzavretý interval $\langle a, b\rangle$, kde $a < b$, je kompaktný.

Interval $I = \langle 0, 1 \rangle$

Tvrdenie

Interval $I = \langle 0, 1 \rangle$ s obvyklou topológiou je kompaktný.

- Dôkaz - „posúvaním sa" doprava (indukcia na reálnej osi). $S = \{x \in \langle 0, 1 \rangle;$ existuje konečný podsystém $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}$ taký, že $\langle 0, x \rangle \subseteq \bigcup \mathcal{F}\}$
- Dôkaz pomocou Alexandrovej vety o subbáze.
- Spojitý obraz $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ (cez binárne rozvoje).

Charakterizácia pomocou uzavretých množín

X je *kompaktný*, ak pre každé otvorené pokrytie priestoru X existuje konečné podpokrytie.

Veta

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor. Priestor X je kompaktný práve vtedy, keď každý centrovaný systém uzavretých množín má neprázdny prienik.

Podpriestory

Tvrdenie

Ak X je kompaktný priestor a S je jeho uzavretý podpriestor, tak aj S je kompaktný.

Tvrdenie

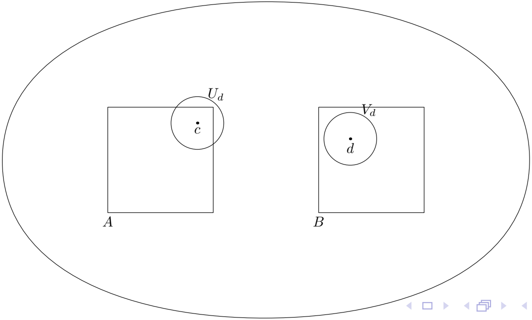
Ak S je podpriestor priestoru X, pričom S je kompaktný a X je Hausdorffovský, tak S je uzavretý podpriestor.

Podpriestory

Tvrdenie

Nech X je hausdorffovský priestor, K je kompaktná podmnožina priestoru X a $x \notin K$. Potom existujú disjunktné množiny U, V také, že $U \cap V = \emptyset$ a súčasne

$$x \in U \qquad a \qquad K \subseteq V.$$



Kompaktný T_2-priestor je normálny

Veta

Nech X je hausdorffovský priestor a $A, B \subseteq X$ sú kompaktné podmnožiny také, že $A \cap B = \emptyset$. Potom existujú otvorené množiny U, V také, že $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ a $U \cap V = \emptyset$.

Dôsledok

Každý kompaktný T_2-priestor je normálny. (Teda je to T_4-priestor.)

Dôsledok

Každý podpriestor kompaktného T_2-priestoru je $T_{3\frac{1}{2}}$-priestor.

Kompaktnosť a (ultra)filtre

Tvrdenie

Nech X je topologický priestor, $\mathcal{U}$ je ultrafilter na množine M a $f\colon M \to X$ je zobrazenie. Ak X je kompaktný priestor, tak existuje $\mathcal{U}$-limita funkcie f.

Dôsledok

Nech X je topologický priestor a $\mathcal{U}$ je ultrafilter na množine X. Ak X je kompaktný priestor, tak existuje aspoň jedna limita ultrafiltra $\mathcal{U}$.

Dôsledok

Nech X je topologický priestor a $\mathcal{F}$ je filter na množine X. Ak X je kompaktný priestor, tak $\mathcal{F}$ má hromadný bod v X.

Kompaktnosť a (ultra)filtre

Tvrdenie

Nech X je topologický priestor. Ak každý filter na množine X má hromadný bod, tak X je kompaktný.

Veta

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

(i) *Priestor X je kompaktný.*

(ii) *Pre ľubovoľnú množinu M, ľubovoľné zobrazenie $f\colon M \to X$ a každý ultrafilter $\mathcal{U}$ na množine M existuje $\mathcal{U}$-limita.*

(iii) *Každý ultrafilter na X konverguje.*

(iv) *Každý filter na X má hromadný bod.*

Kompaktnosť siete

Tvrdenie

Ak X je kompaktný priestor, tak ľubovoľná sieť $(x_d)_{d\in D}$ v X má hromadný bod.

$$\bigcap_{d\in D} \overline{\{x_e; e \in D, e \geq d\}}.$$

Kompaktnosť siete

Tvrdenie

Nech X je topologický priestor. Ak každá sieť $(x_d)_{d \in D}$ v X má hromadný bod, tak X je kompaktný.

Spojitý obraz

Veta

Spojitý obraz kompaktného priestoru je kompaktný.

Dôsledok

Nech X je kompaktný topologický priestor, Y je Hausdorffovský a $f : X \to Y$ je spojité zobrazenie. Potom f je aj uzavreté zobrazenie.

Dôsledok

Nech X je kompaktný topologický priestor, Y je Hausdorffovský. Ak $f : X \to Y$ je spojitá bijekcia, tak f je homeomorfizmus.

Dôsledok

Nech X je kompaktný priestor a $f : X \to \mathbb{R}$ je spojité zobrazenie. Potom množina $f[X]$ má maximum a minimum.

Tichonovova veta

Veta (Tichonovova veta)

Ak pre každé $i \in I$ je X_i kompaktný priestor, tak aj topologický súčin $\prod_{i \in I} X_i$ je kompaktný.

Dôsledok

Hausdorfovský priestor X je kompaktný práve vtedy, keď X je homeomorfný s uzavretým podpriestorom Tichonovovej kocky.

Dôsledok

Topologický priestor X je $T_{3\frac{1}{2}}$-priestor práve vtedy, keď X je homeomorfný s podpriestorom nejakého kompaktného hausdorfovského priestoru.