Lokálne kompaktné priestory

11. decembra 2024

Lokálne kompaktné priestory

Definícia

Topologický priestor X sa nazýva *lokálne kompaktný,* ak každý bod $x \in X$ má nejaké kompaktné okolie v X.

Definícia

Nech X je topologický priestor a $A \subseteq X$. Podmnožina A sa nazýva *relatívne kompaktná* v X, ak množina $\overline{A}$ je kompaktná.

Lokálne kompaktné priestory

Tvrdenie

Nech X je hausdorffovský priestor. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

(i) *X je lokálne kompaktný, t.j. pre každý bod $x \in X$ existuje nejaké kompaktné okolie K_x;*

(ii) *pre každý bod $x \in X$ existuje okolie U_x také, že množina $\overline{U_x}$ je kompaktná v X;*

(iii) *každý bod $x \in X$ má bázu okolí pozostávajúcu z kompaktných množín;*

(iv) *každý bod $x \in X$ má bázu okolí $\mathcal{B}_x$ takú, že pre každé $U \in \mathcal{B}_x$ je množina $\overline{U}$ kompaktná v X.*

Inak: každý bod má relatívne kompaktné okolie resp. každý bod má bázu okolí pozostávajúcu z relatívne kompaktných množín.

Príklady

- $\mathbb{R}$ aj $\mathbb{R}^n$ (s obvyklou topológiou) sú lokálne kompaktné priestory. Systém $\{\langle x-\varepsilon, x+\varepsilon\rangle; \varepsilon > 0\}$ je báza okolí bodu x.
- Priestor $(X, \mathcal{T}_{disc})$ je lokálne kompaktný.
- Racionálne čísla $\mathbb{Q}$ (s obvyklou topológiou) nie sú lokálne kompaktný priestor.

Podpriestory

- Podpriestor lokálne kompaktného priestoru nemusí byť lokálne kompaktný. (Napríklad $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$.)
- Uzavretý podpriestor lokálne kompaktného T_2-priestoru je lokálne kompaktný.
- Otvorený podpriestor lokálne kompaktného T_2-priestoru je lokálne kompaktný.

Tvrdenie

Ak X je lokálne kompaktný podpriestor hausdorffovského priestoru Y, tak existuje uzavretá množina C a otvorená množina U v Y tak, že

$$X = C \cap U.$$

Špeciálne, X je otvorená podmnožina v priestore $\overline{X}$.

Podpriestory

Tvrdenie

Ak X je lokálne kompaktný podpriestor hausdorffovského priestoru Y, tak existuje uzavretá množina C a otvorená množina U v Y tak, že

$$X = C \cap U.$$

Špeciálne, X je otvorená podmnožina v priestore $\overline{X}$.

Dôsledok

Ak D je hustá podmnožina T_2-priestoru Y a D je lokálne kompaktná, tak D je otvorená množina.

$\mathbb{Q}$ je hustá v $\mathbb{R}$, nie je otvorená $\Rightarrow$ nie je to lokálne kompaktná podmnožina.

Súčiny

Tvrdenie

Ak X je lokálne kompaktný a $f: X \to Y$ je otvorená spojitá surjekcia, tak aj Y je lokálne kompaktný.

Tvrdenie

Nech pre každé $i \in I$ je $X_i \neq \emptyset$. Topologický súčin $X = \prod_{i \in I} X_i$ je lokálne kompaktný práve vtedy, keď všetky $i \in I$ je priestor X_i lokálne kompaktný a súčasne s výnimkou konečne veľa indexov sú všetky X_i kompaktné.

Kompaktifikácia

Definícia

Nech X, Y sú topologické priestory a $c\colon X \hookrightarrow Y$ je vloženie. Ak Y je kompaktný Hausdorffovský priestor a množina $c[X]$ je hustá v Y tak hovoríme, že dvojica (Y, c) je *kompaktifikácia* priestoru X.

Tvrdenie

Nech X je topologický priestor. Priestor X má kompaktifikáciu práve vtedy, keď X je $T_{3\frac{1}{2}}$-priestor.

Jednobodová kompaktifikácia

Tvrdenie

Nech $(X,\mathcal{T})$ je topologický priestor a $\infty \notin X$. Na množine $X^* = X \cup \{\infty\}$ definujeme

$$\mathcal{T}^* = \mathcal{T} \cup \{X^* \setminus C;\, C \text{ je uzavretá kompaktná podmnožina v } X\}.$$

Potom platí:

(i) *$(X^*,\mathcal{T}^*)$ je topologický priestor.*

(ii) *$(X,\mathcal{T})$ je otvorený podpriestor priestoru $(X^*,\mathcal{T}^*)$.*

(iii) *$(X^*,\mathcal{T}^*)$ je kompaktný priestor.*

(iv) *X je hustá podmnožina v X^* práve vtedy, keď X nie je kompaktný.*

(v) *Priestor $(X^*,\mathcal{T}^*)$ je hausdorffovský práve vtedy, keď X je hausdorffovský a lokálne kompaktný.*

Jednobodová kompaktifikácia

Ak X je hausdorffovský, lokálne kompaktný priestor, ktorý nie je kompaktný. Na množine $X^* = X \cup \{\infty\}$ definujeme

$$\mathcal{T}^* = \mathcal{T} \cup \{X^* \setminus C; C \text{ je uzavretá kompaktná podmnožina v } X\}.$$

Potom $\mathcal{T}^*$ je topológia na X^* a $(X^*, \mathcal{T}^*)$ je kompaktný T_2-priestor, ktorý obsahuje X ako hustý podpriestor.

Jednobodová kompaktifikácia

Definícia

Ak X je lokálne kompaktný T_2-priestor, ktorý nie je kompaktný, tak priestor $(X^*, \mathcal{T}^*)$ spolu s vložením $id\colon X \hookrightarrow X^*$ z predošlej vety nazývame *jednobodová kompaktifikácia* alebo tiež *Alexandrovova kompaktifikácia* priestoru X.

Dôsledok

Každý lokálne kompaktný T_2-priestor je tichonovovský.

Príklady

Príklad

- Priestor $C(\omega)$ je jednobodová kompaktifikácia spočítateľného diskrétneho priestoru.
- Kružnica je jednobodová kompaktifikácia $\mathbb{R}$.