Lindelöfovské priestory

12. decembra 2022

Lindelöfovské priestory

Definícia

Topologický priestor X je *lindelöfovský*, ak každé otvorené pokrytie priestoru X má spočítateľné podpokrytie.

Tvrdenie

Nech X je lindelöfovský priestor.

(i) *Ak S je uzavretý podpriestor priestoru X, tak aj S je lindelöfovský.*

(ii) *Ak $f : X \to Y$ je spojité surjektívne zobrazenie, tak aj Y je lindelöfovský.*

Lindelöfovské priestory

Tvrdenie

Nech X je topologický priestor.
a) Ak X je kompaktný, tak X je aj lindelöfovský.
b) Ak X má spočítateľnú bázu topológie, tak X je lindelöfovský.

Úloha

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor a $\mathcal{B}$ je nejaká báza topológie $\mathcal{T}$. Ak každé pokrytie priestoru X množinami z $\mathcal{B}$ má spočítateľné podpokrytie, tak X je lindelöfovský.

Lindelöfovské priestory

Tvrdenie

Nech X je topologický priestor.
a) Ak X je kompaktný, tak X je aj lindelöfovský.
b) Ak X má spočítateľnú bázu topológie, tak X je lindelöfovský.

- $\mathbb{R}$ s obvyklou topológiou – je lindelöfovský a nie je kompaktný.
- Sorgenfreyova priamka $\mathbb{R}_l$ – je lindelöfovský ale nemá spočítateľnú bázu topológie.

Sorgenfreyova priamka je lindelöfovský priestor

$$X = \bigcup_{i \in I} \langle a_i, b_i)$$

$$A = \bigcup_{i \in I} (a_i, b_i)$$

$$B = \mathbb{R} \setminus A$$

Lindelöfovské priestory

Tvrdenie

Topologický priestor X je kompaktný práve vtedy, keď X je lindelöfovský a spočítateľne kompaktný.

Lindelöfovský priestor je normálny

Tvrdenie

Každý regulárny lindelöfovský priestor je normálny.

Dôsledok

Každý regulárny priestor vyhovujúci druhej axióme spočítateľnosti je normálny.

Lindelöfovský priestor je normálny

$$A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n \quad \text{a} \quad (\forall n \in \mathbb{N})\overline{U_n} \cap B = \emptyset$$

$$B \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n \quad \text{a} \quad (\forall n \in \mathbb{N})\overline{V_n} \cap A = \emptyset$$

$$U'_n = U_n \setminus \bigcup_{k\leq n} \overline{V_k} \quad \text{a} \quad V'_n = V_n \setminus \bigcup_{k\leq n} \overline{U_k}$$

$$U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U'_n \quad \text{a} \quad V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$$