Súvislé priestory

3. decembra 2024

Súvislé priestory

Definícia

Topologický priestor X sa nazýva *súvislý*, ak neexistujú neprázdne disjunktné otvorené podmnožiny priestoru X také, že $A \cup B = X$. Hovoríme, že podmnožina C v topologickom priestore X je *súvislá*, ak C s relatívnou topológiou je súvislý priestor.

Tvrdenie

Nech X je topologický priestor. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

(i) *X je súvislý.*

(ii) *Ak A je obojaká množina v X, tak $A = \emptyset$ alebo $A = X$.*

(iii) *Ak D je diskrétny dvojprvkový priestor a $f : X \to D$ je spojité zobrazenie, tak f je konštantné.*

Príklady

- Diskrétny priestor $|X| \geq 2$ nie je súvislý.
- Sorgenfreyova priamka $\mathbb{R}_l$ nie je súvislý priestor.

Tvrdenie

Interval $\langle 0, 1 \rangle$ s obvyklou topológiou je súvislý priestor.

Hustá súvislá podmnožina

Tvrdenie

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor. Ak D je hustá množina v X, ktorá je súvislá, tak aj priestor X je súvislý.

Dôsledok

Nech X je topologický priestor a C je nejaká súvislá množina v X. Potom aj ľubovoľná podmnožina A taká, že $C \subseteq A \subseteq \overline{C}$ je súvislá.

Spojitý obraz

Tvrdenie

Spojitý obraz súvislého priestoru je súvislý.

Reťaze

Definícia

Nech X je topologický priestor a $x, y \in X$. Nech $\mathcal{U}$ je otvorené pokrytie priestoru X. Povieme, že konečná postupnosť množín $U_0, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ je *reťaz v* $\mathcal{U}$ spájajúca x, y ak $x \in U_0$, $y \in U_n$ a pre každé $i = 0, \ldots, n-1$ platí $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$.

Tvrdenie

Nech X je topologický priestor. Priestor X je súvislý práve vtedy, keď pre ľubovoľné otvorené pokrytie $\mathcal{U}$ a pre ľubovoľné $x, y \in X$ existuje reťaz v $\mathcal{U}$ spájajúca x a y.

Neprázdny prienik

Tvrdenie

Nech X je topologický priestor a $\{Y_i; i \in I\}$ je systém súvislých podmnožín priestoru X. Ak platí $\bigcap\limits_{i\in I} Y_i \neq \emptyset$, tak aj množina $Y = \bigcup\limits_{i\in I} Y_i$ je súvislá.

Dôsledok

Podpriestor $S \subseteq \mathbb{R}$ reálnej osi (s obvyklou topológiou) je súvislý práve vtedy, keď S je interval.

Dôsledok

Nech X je topologický priestor. Ak pre ľubovoľné $x, y \in S$ existuje súvislý podpriestor $S_{x,y}$ taký, že $x, y \in S_{x,y}$, tak priestor X je súvislý.

Súčin súvislých priestorov

Tvrdenie

Ak X, Y sú súvislé priestory, tak ich topologický súčin $X \times Y$ je opäť súvislý.

Ak $X_1, \ldots, X_n$ sú súvislé priestory, tak aj ich súčin $\prod_{i=1}^{n} X_i$ je súvislý.

Veta

Nech pre každé $i \in I$ je X_i neprázdny topologický priestor. Topologický súčin $\prod_{i \in I} X_i$ je súvislý práve vtedy, keď priestor X_i je súvislý pre každé $i \in I$.

Komponenty súvislosti

Definícia

Ak X je topologický priestor a $C \subseteq X$ je maximálna (vzhľadom na inklúziu) súvislá podmnožina priestoru X, tak hovoríme, že C je *komponent súvislosti* priestoru X.

Tvrdenie

Nech X je topologický priestor a $x \in X$. Ak položíme

$$C_x = \bigcup \{C \subseteq X; x \in C, C \text{ je súvislá množina}\},$$

tak C_x je súvislá množina obsahujúca x, ktorá je navyše maximálna vzhľadom na inklúziu – teda je to komponent súvislosti.
Množinu C_x nazývame komponent súvislosti bodu x.

Komponenty súvislosti

Tvrdenie

Nech X je topologický priestor a $x \in X$. Ak položíme

$$C_x = \bigcup \{C \subseteq X; x \in C, C \text{ je súvislá množina}\},$$

tak C_x je súvislá množina obsahujúca x, ktorá je navyše maximálna vzhľadom na inklúziu – teda je to komponent súvislosti. Množinu C_x nazývame komponent súvislosti bodu x.

Dôsledok

Ak X je topologický priestor a S je súvislá množina, tak existuje komponent súvislosti C taký, že $S \subseteq C$.

Komponenty súvislosti

Tvrdenie

Komponenty súvislosti priestoru X tvoria rozklad množiny X. (T.j. sú navzájom disjunktné a ich zjednotenie je celé X.)

Veta

Všetky komponenty súvislosti v X sú uzavreté.

Vo všeobecnosti komponenty nemusia byť otvorené.

Príklad

Uvažujme $\mathbb{Q}$ s obvyklou topológiou. Všetky komponenty súvislosti priestoru $\mathbb{Q}$ sú jednoprvkové.

Lineárne súvislé priestory

Definícia

Topologický priestor X sa nazýva *lineárne súvislý,* ak pre ľubovoľné $x, y \in X$ existuje spojité zobrazenie $f\colon \langle 0,1\rangle \to X$ také, že $f(0) = x$, $f(1) = y$. Takéto zobrazenie f nazývame *cesta* z x do y. Priestor X nazveme *oblúkovo súvislý,* ak pre ľubovoľné $x, y \in X$ existuje vloženie $h\colon \langle 0,1\rangle \to X$ také, že $h(0) = x$, $h(1) = y$. (Tu teda navyše žiadame, aby $h[\langle 0,1\rangle] \cong \langle 0,1\rangle$, t.j. podpriestor $h[\langle 0,1\rangle]$ je homeomorfný s jednotkovým intervalom.)

Lineárne súvislé priestory

Tvrdenie

Ak X je oblúkovo súvislý, tak je lineárne súvislý.
Ak X je lineárne súvislý, tak je súvislý.

Pre T_2 priestory: oblúkovo súvisly $\Leftrightarrow$ lineárne súvislý. (Dôkaz nie je jednoduchý.)

Lineárne súvislé priestory

Príklad

$$X = \{(0,0)\} \cup \{(x, \sin\frac{1}{x}); x \in \mathbb{R}, x > 0\}$$

Priestor X je súvislý, ale nie je lineárne súvislý.

Lokálne súvislé priestory

Definícia

Topologický priestor X nazveme *lokálne súvislý*, ak pre každé $x \in X$ existuje báza okolí pozostávajúca z otvorených súvislých množín. Priestor X je *lokálne lineárne súvislý*, ak každý bod $x \in X$ má bázu okolí tvorenú otvorenými lineárne súvislými množinami.

Indukcia na reálnej osi

Tvrdenie

Nech $S \subseteq \langle a, b\rangle$ *je podmnožina, ktorá spĺňa podmienky:*

- $a \in S$.
- *Ak* $x \in S$ *pre nejaké* $y < b$, *tak existuje* $y > x$ *také, že* $\langle x, y\rangle \subseteq S$.
- *Ak pre* $x \leq b$ *platí* $\langle a, x) \subseteq S$, *tak aj* $x \in S$.

Potom $S = \langle a, b\rangle$.