

Všeobecná topológia – sada úloh č. 1

Každá z uvedených úloh má hodnotu 20 bodov. Rozumné je každú z nich začať na novej strane.

Úloha 1. Nech (X, \mathcal{T}_X) , (Y, \mathcal{T}_Y) sú topologické priestory, a nech \mathcal{B}_X je báza topológie \mathcal{T}_X , \mathcal{B}_Y je topológia \mathcal{T}_Y .

Zobrazenie $f: X \rightarrow Y$ je spojité práve vtedy, keď:

- Pre každé $V \in \mathcal{T}_Y$ platí $f^{-1}[V] \in \mathcal{T}_X$.
 - Pre každé $V \in \mathcal{T}_Y$ a $x \in X$ také, že $f(x) \in V$ existuje $U \in \mathcal{T}_X$ také, že $x \in U$ a $f[U] \subseteq V$.
- Zistite, či tieto ekvivalencie zostanú v platnosti ak všade namiesto \mathcal{T} napíšeme \mathcal{B} . (Svoje tvrdenie zdôvodnite.)

Úloha 2. Nech (D, \leq_1) a (E, \leq_2) sú nahor usmernené množiny. Na množine $D \times E$ definujme reláciu

$$(d_1, e_1) \leq (d_2, e_2) \Leftrightarrow (d_1 \leq_1 e_1) \wedge (d_2 \leq_2 e_2).$$

T.j. usporiadaná dvojica porovnávame tak, že nerovnosť platí na oboch súradniciach.

Dokážte, že $(D \times E, \leq)$ je nahor usmernená množina.

Úloha 3. Nech (D, \leq) je nahor usmernená množina a $x: D \rightarrow \mathbb{R}$ spĺňa

$$(\forall d, d' \in D)(d \leq d' \Rightarrow x_d \leq x_{d'}).$$

(T.j. je to neklesajúca sieť reálnych čísel.)

Dokážte, že ak je táto sieť zhora ohraničená, tak existuje jej limita $L = \lim_{d \in D} x_d$ a platí

$$L = \sup_{d \in D} x_d.$$

Úloha 4. Ukážte, že ak priestor X spĺňa Urysohnovu lemu, tak je normálny.

T.j. chceme ukázať, že X je normálny, ak vieme, že pre ľubovoľné disjunktné uzavreté podmnožiny A, B tohto priestoru existuje spojité funkcia $f: X \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ taká, že

$$A \subseteq f^{-1}[\{0\}] \quad \text{a} \quad B \subseteq f^{-1}[\{1\}].$$

Úloha 5. Nech $X = \{0, 1\}^\omega$ je súčin spočítateľne veľa kópií diskretného dvojprvkového priestoru a nech $I = \langle 0, 1 \rangle$ je uzavretý jednotkový interval s obvyklou topológiou. Položme

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}}.$$

- Ukážte, že uvedený predpis priradí každému $x \in X$ práve jeden prvok $\varphi(x) \in I$, teda naozaj dostávame zobrazenie $\varphi: X \rightarrow I$.
- Ukážte, že zobrazenie φ je spojité.
- Ukážte, že zobrazenie φ je surjektívne. Je toto zobrazenie aj injektívne?
- Dajú sa veci dokázané v predchádzajúcich častiach využiť na dôkaz kompaktnosti priestoru $I = \langle 0, 1 \rangle$?