Všeobecná topológia – sada úloh č. 3

Každá z uvedených úloh má hodnotu 20 bodov. Rozumné je každú z nich začať na novej strane.

Úloha 1. Pre každé $i \in I$ majme topologický priestor X_i a nejakú podmnožinu $A_i \subseteq X_i$. Ukážte, že

$$\prod_{i\in I} \overline{A_i} = \overline{\prod_{i\in I} A_i}.$$

Úloha 2. Nech $f\colon M \to X$, $g\colon M \to Y$ a $\mathcal{F}$ je filter na množine M. Ukážte, že:
a) Ak a je $\mathcal{F}$-limita funkcie f a b je $\mathcal{F}$-limita funkcie g, tak (a,b) je $\mathcal{F}$-limita funkcie $h = \langle f, g\rangle$ určenej ako $h(x) = (f(x), g(x))$.
b) Ak navyše predpokladáme $X = Y = \mathbb{R}$, tak ukážte, že $a + b$ je $\mathcal{F}$-limita funkcie $f + g$.

Úloha 3. Nech A, B sú disjunktné uzavreté podmnožiny metrického priestoru (X, d). Dokážte, že predpis

$$f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)}$$

definuje zobrazenie $f\colon X \to \langle 0, 1\rangle$, ktoré je spojité a platí preň $f|_A = 0$ a $f|_B = 1$. (T.j. v metrických priestoroch vieme priamo napísať predpis zobrazenia o akom hovorí Urysohnova lema.)

Úloha 4. Ukážte, že ak priestor X spĺňa Urysohnovu lemu, tak je normálny.

T.j. chceme ukázať, že X je normálny, ak vieme, že pre ľubovoľné disjunktné uzavreté podmnožiny A, B tohto priestoru existuje spojitá funkcia $f\colon X \to \langle 0, 1\rangle$ taká, že

$$A \subseteq f^{-1}[\{0\}] \qquad \text{a} \qquad B \subseteq f^{-1}[\{1\}].$$

Úloha 5. Nech $X = \{0, 1\}^\omega$ je súčin spočítateľne veľa kópií diskrétneho dvojprvkového priestoru a nech $I = \langle 0, 1\rangle$ je uzavretý jednotkový interval s obvyklou topológiou. Položme

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}}.$$

a) Ukážte, že uvedený predpis priradí každému $x \in X$ práve jeden prvok $\phi(x) \in I$, teda naozaj dostávame zobrazenie $\varphi\colon X \to I$.
b) Ukážte, že zobrazenie φ je spojité.
c) Ukážte, že zobrazenie φ je surjektívne. Je toto zobrazenie aj injektívne?
d) Dajú sa veci dokázané v predchádzajúcich častiach využiť na dôkaz kompaktnosti priestoru $I = \langle 0, 1\rangle$?