Všeobecná topológia – sada úloh č. 4

Každá z uvedených úloh má hodnotu 20 bodov. Rozumné je každú z nich začať na novej strane.

Úloha 1. Nech $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ sú topologické priestory, a nech $\mathcal{B}_X$ je báza topológie $\mathcal{T}_X$, $\mathcal{B}_Y$ je topológie $\mathcal{T}_Y$.

Zobrazenie $f\colon X \to Y$ je spojité práve vtedy, keď:

a) Pre každé $V \in \mathcal{T}_Y$ platí $f^{-1}[V] \in \mathcal{T}_X$.

b) Pre každé $V \in \mathcal{T}_Y$ a $x \in X$ také, že $f(x) \in V$ existuje $U \in \mathcal{T}_X$ také, že $x \in U$ a $f[U] \subseteq V$.

Zistite, či tieto ekvivalencie zostanú v platnosti ak všade namiesto $\mathcal{T}$ napíšeme $\mathcal{B}$. (Svoje tvrdenie zdôvodnite.)

Úloha 2. Nech $(D, \leq)$ je nahor usmernená množina a $x\colon D \to \mathbb{R}$ spĺňa

$$(\forall d, d' \in D)(d \leq d' \Rightarrow x_d \leq x'_d).$$

(T.j. je to neklesajúca sieť reálnych čísel.)

Dokážte, že ak je táto sieť zhora ohraničená, tak existuje jej limita $L = \lim\limits_{d \in D} x_d$ a platí

$$L = \sup_{d \in D} x_d.$$

Úloha 3. Nech X je topologický priestor a $\mathcal{F}$ je filter na X. Dokážte, že $\{(b, F); b \in F \in \mathcal{F}\}$ s reláciou

$$(b_1, F_1) \leq (b_2, F_2) \Leftrightarrow F_1 \supseteq F_2$$

je nahor usmernená množina.

Ak na tejto nahor usmernenej množine definujeme sieť

$$x_{(b,F)} = b,$$

tak pre $a \in X$ platí:

a) Táto sieť konverguje k a práve vtedy, keď $\mathcal{F} \to a$.

b) Bod a je hromadný bod tejto siete práve vtedy, keď a je hromadný bod filtra $\mathcal{F}$.

Úloha 4. Ukážte, že ak priestor X spĺňa Tietzeho vetu, tak je normálny.

T.j. chceme ukázať, že X je normálny, ak pre každú uzavretú podmnožinu $A \subseteq X$ a každé spojité zobrazenie $f\colon A \to \mathbb{R}$ existuje spojité zobrazenie $F\colon X \to \mathbb{R}$ také, že

$$F|_A = f.$$

Úloha 5. Nech $X = \{0, 1\}^\omega$ je súčin spočítateľne veľa kópií diskrétneho dvojprvkového priestoru a nech $I = \langle 0, 1\rangle$ je uzavretý jednotkový interval s obvyklou topológiou. Položme

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}}.$$

a) Ukážte, že uvedený predpis priradí každému $x \in X$ práve jeden prvok $\phi(x) \in I$, teda naozaj dostávame zobrazenie $\varphi\colon X \to I$.

b) Ukážte, že zobrazenie φ je spojité.

c) Ukážte, že zobrazenie φ je surjektívne. Je toto zobrazenie aj injektívne?

d) Dajú sa veci dokázané v predchádzajúcich častiach využiť na dôkaz kompaktnosti priestoru $I = \langle 0, 1\rangle$?