Všeobecná topológia – sada úloh č. 5

Každá z uvedených úloh má hodnotu 20 bodov. Rozumné je každú z nich začať na novej strane.

Úloha 1. Nech $(X,\mathcal{T}_X)$, $(Y,\mathcal{T}_Y)$ sú topologické priestory, a nech $\mathcal{B}_X$ je báza topológie $\mathcal{T}_X$, $\mathcal{B}_Y$ je topológie $\mathcal{T}_Y$.

Zobrazenie $f\colon X\to Y$ je spojité práve vtedy, keď:
a) Pre každé $V\in\mathcal{T}_Y$ platí $f^{-1}[V]\in\mathcal{T}_X$.
b) Pre každé $V\in\mathcal{T}_Y$ a $x\in X$ také, že $f(x)\in V$ existuje $U\in\mathcal{T}_X$ také, že $x\in U$ a $f[U]\subseteq V$.

Zistite, či tieto ekvivalencie zostanú v platnosti ak všade namiesto $\mathcal{T}$ napíšeme $\mathcal{B}$. (Svoje tvrdenie zdôvodnite.)

Úloha 2. Nech $f\colon M\to X$, $g\colon M\to Y$ a $\mathcal{F}$ je filter na množine M. Ukážte, že:
a) Ak a je $\mathcal{F}$-limita funkcie f a b je $\mathcal{F}$-limita funkcie g, tak (a,b) je $\mathcal{F}$-limita funkcie $h=\langle f,g\rangle$ určenej ako $h(x)=(f(x),g(x))$.
b) Ak navyše predpokladáme $X=Y=\mathbb{R}$, tak ukážte, že $a+b$ je $\mathcal{F}$-limita funkcie $f+g$.

Úloha 3. Ukážte, že topologický priestor $(X,\mathcal{T})$ je normálny práve vtedy, keď platí nasledujúca podmienka: Pre ľubovoľné otvorené podmnožiny $U,V\subseteq X$ také, že $U\cup V=X$ existujú uzavreté množiny $C,D\subseteq X$ tak, že $C\subseteq U$, $D\subseteq V$ a $C\cup D=V$.

Úloha 4. Ukážte, že ak priestor X spĺňa Urysohnovu lemu, tak je normálny.

T.j. chceme ukázať, že X je normálny, ak vieme, že pre ľubovoľné disjunktné uzavreté podmnožiny A, B tohto priestoru existuje spojitá funkcia $f\colon X\to\langle 0,1\rangle$ taká, že

$$A\subseteq f^{-1}[\{0\}] \qquad \text{a} \qquad B\subseteq f^{-1}[\{1\}].$$

Úloha 5. Nech $X=\{0,1\}^\omega$ je súčin spočítateľne veľa kópií diskrétneho dvojprvkového priestoru a nech $I=\langle 0,1\rangle$ je uzavretý jednotkový interval s obvyklou topológiou. Položme

$$\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x_n}{2^{n+1}}.$$

a) Ukážte, že uvedený predpis priradí každému $x\in X$ práve jeden prvok $\phi(x)\in I$, teda naozaj dostávame zobrazenie $\varphi\colon X\to I$.
b) Ukážte, že zobrazenie φ je spojité.
c) Ukážte, že zobrazenie φ je surjektívne. Je toto zobrazenie aj injektívne?
d) Dajú sa veci dokázané v predchádzajúcich častiach využiť na dôkaz kompaktnosti priestoru $I=\langle 0,1\rangle$?