Všeobecná topológia – sada úloh č. 7

Každá z uvedených úloh má hodnotu 20 bodov. Rozumné je každú z nich začať na novej strane.

Úloha 1. Nech $q\colon X \to Y$ je spojité zobrazenie. Ukážte, že ak pre každý topologický priestor Z a každé zobrazenie $f\colon Y \to Z$ zo spojitosti zobrazenia $f \circ q$ vyplýva spojitosť zobrazenia f, tak q je faktorové zobrazenie.

Úloha 2. Nech $(D, \leq)$ je nahor usmernená množina a $x\colon D \to \mathbb{R}$ spĺňa

$$(\forall d, d' \in D)(d \leq d' \Rightarrow x_d \leq x'_d).$$

(T.j. je to neklesajúca sieť reálnych čísel.)

Dokážte, že ak je táto sieť zhora ohraničená, tak existuje jej limita $L = \lim\limits_{d\in D} x_d$ a platí

$$L = \sup_{d\in D} x_d.$$

Úloha 3. Nech $f\colon M \to X$, $g\colon M \to Y$ a $\mathcal{F}$ je filter na množine M. Ukážte, že:
a) Ak a je $\mathcal{F}$-limita funkcie f a b je $\mathcal{F}$-limita funkcie g, tak (a, b) je $\mathcal{F}$-limita funkcie $h = \langle f, g\rangle$ určenej ako $h(x) = (f(x), g(x))$.
b) Ak navyše predpokladáme $X = Y = \mathbb{R}$, tak ukážte, že $a + b$ je $\mathcal{F}$-limita funkcie $f + g$.

Úloha 4. Ukážte, že ak priestor X spĺňa Urysohnovu lemu, tak je normálny.

T.j. chceme ukázať, že X je normálny, ak vieme, že pre ľubovoľné disjunktné uzavreté podmnožiny A, B tohto priestoru existuje spojitá funkcia $f\colon X \to \langle 0, 1\rangle$ taká, že

$$A \subseteq f^{-1}[\{0\}] \qquad \text{a} \qquad B \subseteq f^{-1}[\{1\}].$$

Úloha 5. Nech $X = \{0, 1\}^\omega$ je súčin spočítateľne veľa kópií diskrétneho dvojprvkového priestoru a nech $I = \langle 0, 1\rangle$ je uzavretý jednotkový interval s obvyklou topológiou. Položme

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}}.$$

a) Ukážte, že uvedený predpis priradí každému $x \in X$ práve jeden prvok $\varphi(x) \in I$, teda naozaj dostávame zobrazenie $\varphi\colon X \to I$.
b) Ukážte, že zobrazenie φ je spojité.
c) Ukážte, že zobrazenie φ je surjektívne. Je toto zobrazenie aj injektívne?
d) Dajú sa veci dokázané v predchádzajúcich častiach využiť na dôkaz kompaktnosti priestoru $I = \langle 0, 1\rangle$?