

Zobrazenia

9. októbra 2025

Karteziánsky súčin

Definícia

Ak A , B sú množiny, tak ich *karteziánsky súčin* je množina všetkých usporiadaných dvojíc (a, b) takých, že $a \in A$ a $b \in B$. Označujeme ho

$$A \times B = \{(a, b); a \in A, b \in B\}.$$

Usporiadaná dvojica:

$$(a, b) = (a', b') \quad \Leftrightarrow \quad (a = a') \wedge (b = b')$$

Karteziánsky súčin

Definícia

Ak A , B sú množiny, tak ich *karteziánsky súčin* je množina všetkých usporiadaných dvojíc (a, b) takých, že $a \in A$ a $b \in B$. Označujeme ho

$$A \times B = \{(a, b); a \in A, b \in B\}.$$

$$\{0, 1\} \times \{0, 1\} = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$$

Definícia zobrazenia

Definícia

Zobrazenie $f: X \rightarrow Y$ z množiny X do množiny Y je podmnožina f množiny $X \times Y$ taká, že ku každému $x \in X$ existuje práve jedno $y \in Y$ s vlastnosťou $(x, y) \in f$.

Množinu X budeme tiež nazývať *definičný obor* zobrazenia f a množina Y je *obor hodnôt* zobrazenia f .

Namiesto zápisu $(x, y) \in f$ budeme používať zápis $y = f(x)$.

Definícia zobrazenia

Definícia

Zobrazenie $f: X \rightarrow Y$ z množiny X do množiny Y je podmnožina f množiny $X \times Y$ taká, že ku každému $x \in X$ existuje práve jedno $y \in Y$ s vlastnosťou $(x, y) \in f$.

Menej formálne: Predpis, ktorý každému prvku x množiny X priradí nejaký prvok $f(x) \in Y$.

Príklady zobrazení

Príklad

Uvedieme niekoľko príkladov zobrazení.

$$f_1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f_1(n) = 2n + 1$$

$$f_2: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f_2(n) = 2n$$

$$f_3: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f_3(n) = \begin{cases} n + 1, & \text{ak } n \text{ je párne} \\ n - 1, & \text{ak } n \text{ je nepárne} \end{cases}$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \cdot \sin x$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \sin x$$

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = x^2$$

Rovnosť zobrazení

Definícia

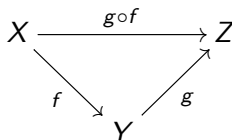
Hovoríme, že dve zobrazenia $f: X \rightarrow Y$ a $g: Z \rightarrow W$ sa *rovnajú*, ak $X = Z$, $Y = W$ a $f(x) = g(x)$ pre každé $x \in X$. (Inými slovami, ak sa rovnajú ich definičné obory, obory hodnôt a obe zobrazenia nadobúdajú v každom bode rovnakú hodnotu.) Rovnosť zobrazení označujeme $f = g$.

Skladanie zobrazení

Definícia (Skladanie zobrazení)

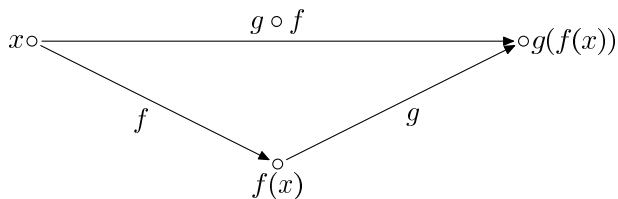
Ak $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ sú zobrazenia, tak *zložením zobrazení f a g* nazývame zobrazenie $g \circ f: X \rightarrow Z$ také, že pre každé $x \in X$ platí

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$



Skládanie zobrazení

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$



Skladanie zobrazení

Tvrdenie (Asociatívnošť skladania zobrazení)

Nech $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$, $h: Z \rightarrow W$ sú zobrazenia, potom

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$$

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$$

Definície

Definícia

Nech $f: X \rightarrow Y$ je zobrazenie. Hovoríme, že f je *injektívne (prosté) zobrazenie* (alebo tiež *injekcia*), ak pre všetky $x, y \in X$ také, že $x \neq y$ platí $f(x) \neq f(y)$.

Hovoríme, že f je *surjekcia* (*surjektívne zobrazenie, zobrazenie na*), ak pre každé $y \in Y$ existuje také, $x \in X$, že $f(x) = y$.

Hovoríme, že f je *bijekcia* (*bijektívne zobrazenie*), ak f je súčasne injekcia aj surjekcia.

Definícia injekcie

Dve ekvivalentné definície injekcie:

- ▶ $(\forall x, y \in X)(x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$
- ▶ $(\forall x, y \in X)(f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$

$$P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \Rightarrow \neg P$$

Injekcia, surjekcia a bijekcia

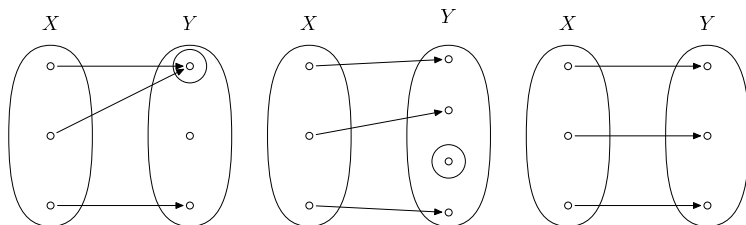


Figure: Ilustrácia injekcie, surjekcie a bijekcie

Injekcia, surjekcia a bijekcia

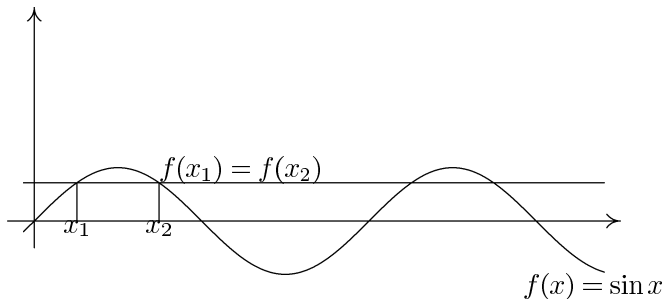


Figure: Ak vodorovná priamka pretne graf v 2 bodoch, zobrazenie nie je injektívne

Injekcie, surjekcie, bijekcie a skladanie

Pre zobrazenia $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ platí:

- ▶ Ak f aj g sú injekcie, tak aj $g \circ f$ je injekcia.
- ▶ Ak f aj g sú surjekcie, tak aj $g \circ f$ je surjekcia.
- ▶ Ak f aj g sú bijekcie, tak aj $g \circ f$ je bijekcia.

Identita

Definícia

Zobrazenie $id_X: X \rightarrow X$ také, že $id_X(x) = x$ pre každé $x \in X$ sa nazýva *identické zobrazenie* (*identita*).

Pre ľubovoľné zobrazenie $f: X \rightarrow Y$ platí

$$f \circ id_X = f \quad \text{a} \quad id_Y \circ f = f.$$

Inverzné zobrazenie

Definícia

Nech $f: X \rightarrow Y$ a $g: Y \rightarrow X$ sú zobrazenia. Ak platí

$$g \circ f = id_X$$

$$f \circ g = id_Y$$

tak hovoríme, že zobrazenie g je *inverzné zobrazenie k f* .

- ▶ Ak inverzné zobrazenie existuje, tak je určené jednoznačne.
- ▶ Označenie: f^{-1}

Inverzné zobrazenie

$$f^{-1} \circ f = id_X$$

$$f \circ f^{-1} = id_Y$$

Pre každé $x \in X$ a pre každé $y \in Y$ platí

$$f^{-1}(f(x)) = x,$$

$$f(f^{-1}(y)) = y.$$

Inverzné zobrazenie

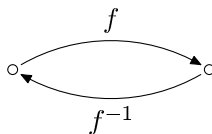


Figure: Inverzné zobrazenie

Inverzné zobrazenie

Tvrdenie

Inverzné zobrazenie k f existuje práve vtedy, keď f je bijekcia.

Inverzné zobrazenie

Tvrdenie

Nech $f: X \rightarrow Y$ a $g: Y \rightarrow Z$ sú bijekcie. Potom

$$\begin{aligned}(f^{-1})^{-1} &= f \\ (g \circ f)^{-1} &= f^{-1} \circ g^{-1}\end{aligned}$$

Dôsledok

Ak f je bijekcia, tak aj f^{-1} je bijekcia.

Inverzné zobrazenie

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

$$f^{-1} \circ f = id_X$$

$$f \circ f^{-1} = id_Y$$

Inverzné zobrazenie

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

$$\begin{aligned}(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) &= f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = \\ &= f^{-1} \circ id_Y \circ f = f^{-1} \circ f = id_X\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) &= g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = \\ &= g \circ id_X \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = id_Z\end{aligned}$$

Ľavé a pravé inverzné zobrazenie

Pre zobrazenia $f: X \rightarrow Y$ a $g: Y \rightarrow X$:

- ▶ g je ľavé inverzné zobrazenie k f , ak platí $g \circ f = id_X$.
- ▶ g je pravé inverzné zobrazenie k f , ak platí $f \circ g = id_Y$.

Ľavé a pravé inverzné zobrazenie

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$f(z) = 2z$$

- ▶ Existuje inverzné zobrazenie k f ?
- ▶ Existuje ľavé (pravé) inverzné zobrazenie k f ?
- ▶ Existuje ich viacero, alebo iba jediné?

Ľavé a pravé inverzné zobrazenie

$$g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$
$$f(z) = \left\lfloor \frac{z}{2} \right\rfloor$$

- ▶ Existuje inverzné zobrazenie ku g ?
- ▶ Existuje ľavé (pravé) inverzné zobrazenie ku g ?
- ▶ Existuje ich viacero, alebo iba jediné?