

Permutácie

4. októbra 2024

Definícia permutácie

Definícia

Ak M je konečná množina, tak bijekciu $\varphi: M \rightarrow M$ budeme nazývať *permutáciou* množiny M .

- ▶ Pracujme s $M = \{1, 2, \dots, n\}$.
- ▶ Koľko je permutácií n -prvkovej množiny.

Zápis permutácie

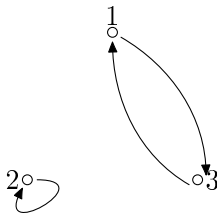
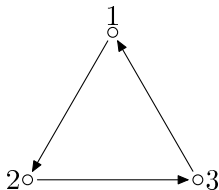
$$\varphi: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \dots & \varphi(n) \end{pmatrix}$$

Napríklad:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{aligned}\varphi(1) &= 1 \\ \varphi(2) &= 3 \\ \varphi(3) &= 2\end{aligned}$$

Zápis permutácie

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$



Skladanie permutácií

- ▶ Zloženie dvoch permutácií množiny M je opäť permutácia množiny M .
- ▶ Viete zdôvodniť prečo je to tak?

Skladanie permutácií

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi \circ \tau = ?$$

$$\tau \circ \varphi = ?$$

Skladanie permutácií

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\tau \circ \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \varphi = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \longrightarrow \varphi\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Inverzná permutácia

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Mocniny permutácie

$$\varphi^0 = id$$

$$\varphi^1 = \varphi$$

$$\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$$

$$\varphi^3 = \varphi \circ \varphi \circ \varphi$$

$$= \vdots$$

$$\varphi^n = \underbrace{\varphi \circ \dots \circ \varphi}_{n\text{-krát}}$$

$$\varphi^k \circ \varphi^l = \varphi^{k+l}$$

$$(\varphi^k)^l = \varphi^{k \cdot l}$$

Mocniny permutácie

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\varphi^{50} = ?$$

Mocniny permutácie

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\varphi^{50} = ?$$

Mocniny permutácie

$$\varphi^1 = \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\varphi^2 = \varphi \circ \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\varphi^3 = \varphi \circ \varphi^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\varphi^{50} = \varphi^{3 \cdot 16 + 2} = \varphi^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Grupa S_n

- ▶ Označme ako S_n množinu všetkých permutácií $\{1, 2, \dots, n\}$.
- ▶ Potom $(S_n, \circ)$ je grupa. $()$
- ▶ Pre $n \geq 3$ to je príklad nekomutatívnej grupy.
- ▶ My si to vyskúšame aspoň pre $n = 3$. Skúste zostaviť tabuľku tejto grupy.

Tabul'ka grupy S_3 :

[illegible]