Lineárna kombinácia, lineárna nezávislosť

17. októbra 2023

Lineárna kombinácia

Definícia

Nech V je vektorový priestor nad poľom F. Hovoríme, že vektor $\vec{\alpha}$ je *lineárnou kombináciou* vektorov $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_n$, ak existujú skaláry $c_1, c_2, \ldots, c_n \in F$ také, že

$$\vec{\alpha} = c_1\vec{\alpha}_1 + c_2\vec{\alpha}_2 + \cdots + c_n\vec{\alpha}_n.$$

Skaláry $c_1, c_2, \ldots, c_n$ nazývame *koeficienty lineárnej kombinácie.*

$$(1,1) = (1,0) + (0,1)$$
$$(2,3,0) = 2 \cdot (1,0,0) + 3 \cdot (0,1,0)$$

Lineárny obal

Tvrdenie

Nech V je vektorový priestor nad poľom F. Ak $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_n \in V$, tak množina

$$M = \{c_1\vec{\alpha}_1 + c_2\vec{\alpha}_2 + \cdots + c_n\vec{\alpha}_n; c_i \in F \text{ pre } i = 1, 2 \ldots, n\}$$

je podpriestor vektorového priestoru V.
Tento podpriestor nazývame lineárny obal vektorov $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_n$ alebo podpriestor generovaný vektormi $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_n$. Označujeme ho

$$M =: [\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_n].$$

Lineárny obal

Stručne: $[\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n]$ je množina všetkých lineárnych kombinácií vektorov $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n$.

Definícia

Ak platí $[\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n] = V$, hovoríme, že vektory $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n$ *generujú* vektorový priestor V.

Lineárny obal

$$\vec{\alpha} = c_1\vec{\alpha}_1 + c_2\vec{\alpha}_2 + \cdots + c_n\vec{\alpha}_n$$
$$\vec{\beta} = d_1\vec{\alpha}_1 + d_2\vec{\alpha}_2 + \cdots + d_n\vec{\alpha}_n$$

$$\begin{aligned}\vec{\alpha} + \vec{\beta} &= c_1\vec{\alpha}_1 + c_2\vec{\alpha}_2 + \cdots + c_n\vec{\alpha}_n + d_1\vec{\alpha}_1 + d_2\vec{\alpha}_2 + \cdots + d_n\vec{\alpha}_n \\ &= (c_1 + d_1)\vec{\alpha}_1 + (c_2 + d_2)\vec{\alpha}_2 + \cdots + (c_n + d_n)\vec{\alpha}_n \\ c\vec{\alpha} &= c(c_1\vec{\alpha}_1 + c_2\vec{\alpha}_2 + \cdots + c_n\vec{\alpha}_n) = cc_1\vec{\alpha}_1 + cc_2\vec{\alpha}_2 + \cdots + cc_n\vec{\alpha}_n\end{aligned}$$

Lineárny obal

- $\mathbb{R}^3 = [(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)]$
- $\mathbb{R}^n = [(1,0,\dots,0),(0,1,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,1)]$
- Pre $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x+y+z=0\}$ platí

$$S = [(1,0,-1),(0,1,-1)].$$

Lineárny obal = najmenší podpriestor

Lema

Ak $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_n \in S$, kde S je podpriestor vektorového priestoru V nad poľom F, aj ich ľubovoľná lineárna kombinácia $c_1\vec{\alpha}_1 + c_2\vec{\alpha}_2 + \cdots + c_n\vec{\alpha}_n$ patrí do podpriestoru S.

Veta

Ak $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_n \in S$, kde S je podpriestor vektorového priestoru V nad poľom F, tak $[\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_n] \subseteq S$.

Stručne: $[\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_n]$ je najmenší podpriestor obsahujúci $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_n$ (najmenší vzhľadom na inklúziu).

Ekvivalentné podmienky pre podpriestor

Predpokladáme, že S je neprázdna podmnožina V.

- Definícia – t.j. uzavretosť na súčet a násobenie skalárom
- $c, d \in F, \vec{\alpha}, \vec{\beta} \in S \Rightarrow c\vec{\alpha} + d\vec{\beta} \in S$
- $c \in F, \vec{\alpha}, \vec{\beta} \in S \Rightarrow c\vec{\alpha} + \vec{\beta} \in S$
- $c_1, \dots, c_n \in F,\ \vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n \in S \Rightarrow c_1\vec{\alpha}_1 + \dots + c_n\vec{\alpha}_n \in S$

Lineárny obal – pridávanie a odoberanie

Veta

Nech $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_n \in V$, $\vec{\beta} \in V$, *kde* V *je vektorový priestor nad poľom* F. *Potom* $\vec{\beta}$ *je lineárnou kombináciou vektorov* $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_n$ *práve vtedy, keď*

$$[\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_n] = [\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_n, \vec{\beta}].$$

Lineárna nezávislosť

Definícia

Nech V je vektorový priestor nad poľom F. Vektory $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n \in V$ sú *lineárne závislé,* ak existujú $c_1, \dots, c_n \in F$, ktoré nie sú všetky nulové a platí

$$c_1\vec{\alpha}_1 + \cdots + c_n\vec{\alpha}_n = \vec{0}.$$

(Stručne: $\vec{0}$ je nenulovou lineárnou kombináciou vektorov $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$.)
V opačnom prípade hovoríme, že vektory $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ *lineárne nezávislé.*

$$c_1\vec{\alpha}_1 + c_2\vec{\alpha}_2 + \cdots + c_n\vec{\alpha}_n = \vec{0} \qquad \Rightarrow \qquad c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0.$$

Príklady

- Čo sa stane, ak máme len jeden vektor?
- Kedy sú dva vektory lineárne závislé?

Príklady

- Jeden vektor: $\vec{\alpha}$ je lineárne závislý $\Leftrightarrow \vec{\alpha} = \vec{0}$.
- Dva vektory lineárne závislé $\Leftrightarrow$ jeden z nich je násobok toho druhého.
- Vektory $(0,1), (1,0), (1,1) \in \mathbb{R}^2$ sú lineárne závislé, lebo $1 \cdot (0,1) + 1 \cdot (0,1) - 1 \cdot (1,1) = (0,0)$.
- Vektory $(1,0), (0,1)$ vo vektorovom priestore $\mathbb{R}^2$ sú lineárne nezávislé.

Kvantifikátory a negácia

$$
\begin{aligned}
\neg[(\forall x)P(x)] \quad &\Leftrightarrow \quad (\exists x)(\neg P(x)),\\
\neg[(\exists x)P(x)] \quad &\Leftrightarrow \quad (\forall x)(\neg P(x)).
\end{aligned}
$$

Kvantifikátory a negácia

$$(\exists c_1, \dots, c_n \in F)$$
$$[c_1\vec{\alpha}_1 + \cdots + c_n\vec{\alpha}_n = 0 \wedge (c_1 \neq 0 \vee c_2 \neq 0 \vee \ldots \vee c_n \neq 0)]$$
$$(\forall c_1, \dots, c_n \in F)$$
$$[c_1\vec{\alpha}_1 + \cdots + c_n\vec{\alpha}_n \neq 0 \vee (c_1 = 0 \wedge c_2 = 0 \wedge \ldots \wedge c_n = 0)]$$
$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall c_1, \dots, c_n \in F)$$
$$(c_1\vec{\alpha}_1 + \cdots + c_n\vec{\alpha}_n = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0)$$

$$(\neg P \vee Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q)$$

Lineárna nezávislosť a lineárne kombinácie

Veta

Nech V je vektorový priestor nad poľom F. Nech n je prirodzené číslo, $n \geq 2$ a $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n \in V$. Vektory $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n$ sú lineárne závislé práve vtedy, keď niektorý z nich je lineárnou kombináciou ostatných.

Veta

Nech V je vektorový priestor nad poľom F. Nech $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n \in V$ sú vektory také, že $\vec{\alpha}_1 \neq \vec{0}$. Vektory $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n$ sú lineárne závislé práve vtedy, keď niektorý z nich je lineárnou kombináciou predchádzajúcich.

Steinitzova veta o výmene

Veta (Steinitzova veta o výmene)

Nech V je vektorový priestor nad poľom F. Ak $V = [\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n]$ (vektorový priestor V je generovaný vektormi $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n$) a $\vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_s \in V$ sú lineárne nezávislé vektory, tak

(i) $s \leq n$,

(ii) z vektorov $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n$ sa dá vybrať $n - s$ vektorov, ktoré spolu s vektormi $\vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_s$ generujú V.

Príklady

$$\begin{aligned}
\vec{\alpha}_1 &= (1,0,0)\\
\vec{\alpha}_2 &= (0,1,0)\\
\vec{\alpha}_3 &= (0,0,1)\\
\vec{\beta}_1 &= (1,1,0)\\
\vec{\beta}_2 &= (1,0,1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V &= [\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \vec{\alpha}_1]\\
V &= [\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \vec{\alpha}_2]\\
V &= [\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \vec{\alpha}_3]
\end{aligned}$$

Príklady

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}_1 &= (1,0,0) \\ \vec{\alpha}_2 &= (0,1,0) \\ \vec{\alpha}_3 &= (0,0,1) \\ \vec{\beta}_1 &= (1,1,0) \\ \vec{\beta}_2 &= (0,1,0) \end{aligned}$$

$$V \neq [\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2] = [\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \vec{\alpha}_1] = [\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \vec{\alpha}_2]$$

$$V = [\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \vec{\alpha}_3]$$