

Lineárne zobrazenia

14. novembra 2023

Definícia lineárneho zobrazenia

Definícia

Ak V a W sú vektorové priestory nad poľom F a $f: V \rightarrow W$ je zobrazenie z V do W , tak hovoríme, že f je *lineárne zobrazenie*, ak pre ľubovoľné $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$ a ľubovoľné $c \in F$ platí

$$(i) \quad f(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = f(\vec{\alpha}) + f(\vec{\beta}),$$

$$(ii) \quad f(c\vec{\alpha}) = cf(\vec{\alpha}).$$

Príklady lineárnych zobrazení

► $id_V: V \rightarrow W$

$$id_V(\vec{\alpha}) = \vec{\alpha}$$

► $f: V \rightarrow W$

$$f(\vec{\alpha}) = \vec{0}$$

Otočenie v rovine

Príklad

Otočenie v rovine o 90° je lineárne zobrazenie.

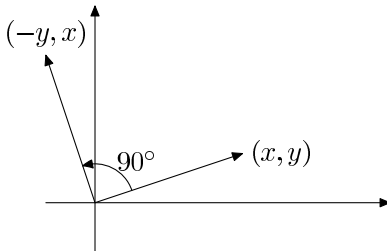


Figure: Otočenie v rovine o 90°

$$f(x, y) = (-y, x)$$

Otočenie v rovine

$$f(x, y) = (-y, x)$$

$$\begin{aligned} f(x, y) + f(x', y') &= (-y, x) + (-y', x') \\ &= (-(y + y'), x + x') = f(x + x', y + y'), \end{aligned}$$

$$f(cx, cy) = (-cy, cx) = c(-y, x) = cf(x, y).$$

Príklady lineárnych zobrazení

Príklad

Zobrazenie $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ určené predpisom

$$f(x, y) = (2x + y, x + 3y)$$

je lineárne zobrazenie.

$$\begin{aligned} f(x, y) + f(x', y') &= (2x + y, x + 3y) + (2x' + y', x' + 3y') = \\ &= (2(x + x') + y + y', x + x' + 3(y + y')) = f(x + x', y + y'), \end{aligned}$$

$$f(cx, cy) = (2cx + cy, cx + 3cy) = c(2x + y, x + 3y) = cf(x, y).$$

Príklady lineárnych zobrazení

$$f(x, y) = (2x + y, x + 3y)$$

Pre ľubovoľné reálne čísla a , b , c , d predpis

$$f(x, y) = (ax + by, cx + dy)$$

určuje lineárne zobrazenie.

Ekvivalentné charakterizácie

Veta

Nech V, W sú vektorové priestory nad poľom F a $f: V \rightarrow W$ je zobrazenie. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

- (a) zobrazenie f je lineárne,
- (b) $f(c\vec{\alpha} + d\vec{\beta}) = cf(\vec{\alpha}) + df(\vec{\beta})$ pre ľubovoľné $c, d \in F$ a ľubovoľné $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$,
- (c) $f(c_1\vec{\alpha}_1 + \dots + c_n\vec{\alpha}_n) = c_1f(\vec{\alpha}_1) + \dots + c_nf(\vec{\alpha}_n)$ pre ľubovoľné $c_1, \dots, c_n \in F$, $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n \in V$.
- (d) $f(c\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = cf(\vec{\alpha}) + f(\vec{\beta})$ pre ľubovoľné $c \in F$ a $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$.

Obráz nulového vektora

Tvrdenie

Ak f je lineárne zobrazenie, tak $f(\vec{0}) = \vec{0}$.

Základná veta o lineárnych zobrazeniach

Veta

Nech V, W sú vektorové priestory. Nech $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ je báza priestoru V a nech $\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_n \in W$. Potom existuje práve jedno lineárne zobrazenie $f: V \rightarrow W$ také, že

$$f(\vec{\alpha}_i) = \vec{\beta}_i$$

pre $i = 1, 2, \dots, n$.

T.j. lineárne zobrazenie je jednoznačne určené obrazmi báзовých vektorov.

Matica lineárneho zobrazenia

Definícia

Nech F je pole. *Matica lineárneho zobrazenia* $f: F^m \rightarrow F^n$ je matica typu $m \times n$ ktorej k -ty riadok je vektor $f(\vec{\varepsilon}_k)$.

Maticu zobrazenia f budeme označovať A_f .

Matica lineárneho zobrazenia

Príklad

Lineárne zobrazenie $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dané predpisom
 $f(x, y) = (2x + y, x + y, x + 2y)$.

$$f(\vec{\varepsilon}_1) = f(1, 0) = (2, 1, 1)$$

$$f(\vec{\varepsilon}_2) = f(0, 1) = (1, 1, 2)$$

Teda matica tohoto zobrazenia je

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Zloženie lineárnych zobrazení

Veta

Nech U, V, W sú vektorové priestory nad tým istým poľom F . Ak $f: U \rightarrow V$ a $g: V \rightarrow W$ sú lineárne zobrazenia, tak aj $g \circ f$ je lineárne zobrazenie.