

1 Lineárne kombinácie, lineárny obal

Lineárny obal je definovaný ako množina všetkých lineárnych kombinácií daných vektorov:

$$[\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n] = \{c_1\vec{\alpha}_1 + c_2\vec{\alpha}_2 + \dots + c_n\vec{\alpha}_n; c_i \in F \text{ pre } i = 1, 2, \dots, n\}$$

Je užitočné si uvedomiť, že:

- Lineárny obal $[\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n]$ je najmenší podpriestor daného vektorového priestoru, ktorý obsahuje vektory $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n$.
- Teda ak S je podpriestor taký, že $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n \in S$, tak $[\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n] \subseteq S$. (Toto je vlastne trochu inak sformulovaný fakt, že podpriestory sú uzavreté vzhľadom na lineárne kombinácie.)
- Vektor $\vec{\beta}$ je lineárna kombinácia vektorov $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n$ práve vtedy, keď

$$[\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n] = [\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n, \vec{\beta}].$$

Čiže pridanie alebo odobratie lineárnej kombinácie neovplyvní lineárny obal.

Úloha 1.1. Nech $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ sú ľubovoľné vektory z vektorového priestoru V nad poľom $\mathbb{R}$. Potom $[\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}] = [\vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{\alpha} - \vec{\beta}, \vec{\gamma}]$.

Úloha 1.2. Nech $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x + 3y + 5z = 0\}$. Ukážte, že M je vektorový podpriestor $\mathbb{R}^3$ a nájdite vektory, ktoré ho generujú.

2 Lineárna nezávislosť

Lineárne závislé vektory: Existujú $c_1, c_2, \dots, c_n \in F$, ktoré nie sú všetky nulové a platí pre ne:

$$c_1\vec{\alpha}_1 + c_2\vec{\alpha}_2 + \dots + c_n\vec{\alpha}_n = \vec{0}.$$

Lineárne nezávislé vektory:

$$c_1\vec{\alpha}_1 + c_2\vec{\alpha}_2 + \dots + c_n\vec{\alpha}_n = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$$

Nie je zlé si uvedomiť, ako to je s lineárnou závislosťou a nezávislosťou, ak máme jeden vektor resp. dva vektory.

Úloha 2.1. Množina $\{\vec{\alpha}\}$ je lineárne nezávislá práve vtedy, keď $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$. Dva vektory $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ sú lineárne závislé práve vtedy, keď jeden z nich je násobkom druhého (t.j. existuje $c \in F$ tak, že $c\vec{\alpha} = \vec{\beta}$), alebo jeden z nich je $\vec{0}$.

Ak vektory $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ sú lineárne nezávislé, tak $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ sú lineárne závislé práve vtedy, keď $\vec{\gamma}$ je lineárna kombinácia vektorov $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

Úloha 2.2. Zistite, či dané vektory sú lineárne závislé v príslušnom vektorovom priestore:

- (1,2,3), (1,3,2), (2,1,5) v $\mathbb{R}^3$,
- (1,2,3), (1,3,2), (2,1,5), (1,127,3) v $\mathbb{R}^3$,
- (1,3,4), (2,1,3), (3,1,4) v $\mathbb{Z}_5^3$,
- (1,3,4), (2,1,3), (3,1,4) v $\mathbb{Z}_7^3$.

V niektorých častiach nasledujúcej úlohy budeme využívať fakt, že polynóm sa rovná nule práve vtedy, keď všetky koeficienty sú nulové.¹ (Ale mali by sme ju vedieť vyriešiť aj bez neho.)

¹<https://msleziak.com/forum/viewtopic.php?t=1349>

Úloha 2.3. Zistite, či sú nasledujúce funkcie lineárne závislé vo vektorovom priestore všetkých funkcií z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$:

- a) $x + 1, x^2, x^3$,
- b) $1, x + a, x^2 + bx + c$ (a, b, c môžu byť ľubovoľné reálne čísla),
- c*) $1, \cos x, \cos^2(\frac{x}{2})$,
- d) $x, x(x - 1), x(x - 1)(x - 2)$,
- e) $1, \cos x, \cos 2x$.

Úloha 2.4. Ak $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ sú lineárne nezávislé vo vektorovom priestore V nad poľom $\mathbb{R}$, tak aj $\vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{\alpha} + \vec{\gamma}, \vec{\beta} + \vec{\gamma}$ sú lineárne nezávislé. (Platilo by to aj vo vektorovom priestore nad poľom $\mathbb{Z}_2$?)

Úloha 2.5*. Overte, že $\mathbb{R}$ je vektorový priestor nad poľom $\mathbb{Q}$. Dokážte, že v tomto priestore sú $1, \sqrt{2}$ a $\sqrt{3}$ lineárne nezávislé.

Úloha 2.6. Ukážte, že vo vektorovom priestore $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$ (z predošlej úlohy) sú lineárne nezávislé vektory $1 + 3\sqrt{2}$ a $2 - \sqrt{2}$.

Úloha 2.7*. Sú $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$ lineárne nezávislé vo vektorovom priestore $\mathbb{R}$ nad poľom $\mathbb{Q}$? (Hint: Úlohu môže o niečo zjednodušiť, ak sa pozriete na 1 a $\sqrt{3}$ ako prvky priestoru $\mathbb{R}$ nad poľom $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Q}\}$.)

Úloha 2.8. Nech $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ sú ľubovoľné vektory. Zistite, či sú tieto systémy vektorov lineárne závislé:

- a) $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{\gamma}$, b) $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{0}$, c) $\vec{\alpha}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$, d) $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}, \vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{\alpha} + \vec{\gamma}, \vec{\beta} + \vec{\gamma}$.

Úloha 2.9. Nech vektory $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ sú lineárne nezávislé vektory v nejakom vektorovom priestore nad poľom $\mathbb{R}$. Sú aj vektory $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_1 + 2\vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_1 + 2\vec{\alpha}_2 + \dots + n\vec{\alpha}_n$ lineárne nezávislé?