

Báza a dimenzia

Vektory $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ tvoria bázu vektorového priestoru V , ak sú *lineárne nezávislé* a *generujú celý priestor*. Ekvivalentná podmienka: Každý vektor $\vec{\beta} \in V$ sa dá *jednoznačne* vyjadriť ako

$$\vec{\beta} = c_1 \vec{\alpha}_1 + \dots + c_n \vec{\alpha}_n.$$

(T.j. máme jednoznačnosť vyjadrenia ľubovoľného vektora v tvare lineárnej kombinácie báзовých vektorov.)

Ľubovoľné dve bázy vektorového priestoru majú rovnaký počet prvkov. Počet prvkov bázy priestoru V nazývame *dimenzia priestoru V* . Označujeme $\dim(V)$ alebo $d(V)$.

Ak $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n \in V$ a $\dim(V) = n$, tak tieto podmienky sú ekvivalentné:

- $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ je báza priestoru V .
- Vektory $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ sú lineárne nezávislé.
- Platí $[\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n] = V$, t.j. tieto vektory generujú celý priestor.

Inak povedané: Ak už viem, že mám „správny počet vektorov“ – toľko, koľko je dimenzia celého priestoru – tak vlastne stačí overiť jednu z dvoch podmienok, ktoré sa vyskytujú v definícii bázy. Tá druhá je potom splnená „zadarmo“.

Úloha 1. Zistite, či dané vektory tvoria bázu v $\mathbb{R}^3$:

- $(1, 2, 3), (1, -2, 3), (1, 2, -3)$
- $(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1)$
- $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)$

Úloha 2. Zistite, či dané vektory tvoria bázu v $\mathbb{Z}_5^3$:

- $(1, 2, 3), (2, 3, 4), (0, 3, 1)$
- $(1, 0, 0), (0, 1, 2), (2, 1, 3)$
- $(0, 1, 2), (3, 0, 1), (1, 0, 2)$.

Úloha 3. Nájdite dimenziu zadaných podpriestorov priestoru $\mathbb{R}^4$. Nájdite pre každý z nich aspoň jednu bázu.

- $S_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$
- $S_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}$
- $S_3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, x_1 + 2x_3 - x_4 = 0\}$

Úloha 4. Určte dimenziu podpriestoru $[\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}]$, ak $\vec{\alpha} = (1, 3, 2, 1)$, $\vec{\beta} = (4, 9, 5, 4)$ a $\vec{\gamma} = (3, 7, 4, 3)$ v $\mathbb{R}^4$.

Úloha 5. Ako P_n označme priestor všetkých polynómov stupňa najviac n . Overte, že $d(P_n) = n + 1$ a že $1, x - 1, \dots, (x - 1)^n$ je báza tohoto priestoru.

Úloha 6. Ak sa to dá, doplňte dané vektory na bázu príslušného vektorového priestoru:

- $(1, 1, 2), (2, 1, 3)$ v $\mathbb{R}^3$,
- $x^2 - 1, x^2 + 1$ v priestore polynómov stupňa najviac 3,
- $(1, 2, 3, 0), (3, 4, 1, 2)$ v $\mathbb{Z}_5^4$.

Úloha 7. Máme dané vektory $\vec{\alpha}_1 = (1, 1, 2, 0)$, $\vec{\alpha}_2 = (0, 0, 3, 1)$ v priestore $\mathbb{Z}_5^4$. Koľko existuje možností na výber vektorov $\vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_4 \in \mathbb{Z}_5^4$ tak, aby tieto štyri vektory tvorili bázu?

Úloha 8. Ak každý z vektorov $\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_k$ je lineárnou kombináciou vektorov $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_m$, tak $d([\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_k]) \leq d([\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_m])$.

Úloha 9. Overte, že množina $S = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : (\exists a, b \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})f(x) = ax + b\}$ je podpriestor priestoru všetkých funkcií z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Nájdite funkcie $g, h \in S$ také, že $S = [g, h]$.

Úloha 10. Zistite, či $S = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = ax^2 + bx + c, a, b, c \in \mathbb{R}\}$ je vektorový podpriestor priestoru reálnych funkcií. Ak áno, nájdite, $g_1, g_2, g_3 \in S$ také, že $S = [g_1, g_2, g_3]$.

Úloha 11. Pre zadané vektorové priestory nad poľom $\mathbb{R}$ ukážte, že nie sú konečnorozmerné.

a) $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, t.j. priestor všetkých zobrazení $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

b) $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, t.j. priestor všetkých postupností reálnych čísel.

Úloha 12. Nech $M \neq \emptyset$ je nejaká množina a F je pole. Uvažujme vektorový priestor $F^M = \{f: M \rightarrow F\}$ nad poľom F . (Teda prvky V sú všetky zobrazenia z M do F .)

Vedeli by ste nájsť nejakú podmienku na množinu M , ktorá zabezpečí, že tento priestor je nekonečnorozmerný?

Úloha 13*. a) Nech $p_1, \dots, p_k$ sú navzájom rôzne prvočísla. Ukážte, že čísla $\ln p_1, \ln p_2, \dots, \ln p_k$ sú lineárne nezávislé ako prvky vektorového priestoru $\mathbb{R}$ nad poľom $\mathbb{Q}$.

b) Ukážte, že vektorový priestor $\mathbb{R}$ nad poľom $\mathbb{Q}$ je nekonečnorozmerný.¹

¹Keď budeme vedieť nejaké veci o lineárnych izomorfizmoch a tiež o spočítateľných a nespočítateľných množinách, tak by sme mali byť schopní nájsť jednoduchšie zdôvodnenie, že ide o nekonečnorozmerný priestor. Dá sa to však zdôvodniť aj takýmto spôsobom – budeme tu potrebovať využiť nejaké veci o prvočíslach.