

Riadková ekvivalencia, úprava na redukovaný tvar

Elementárne riadkové operácie:

- výmena 2 riadkov matice,
- vynásobenie niektorého riadku matice nenulovým prvkom c poľa F ,
- pripočítanie násobku niektorého riadku k inému riadku.

Redukovaný trojuholníkový tvar:

- Vedúci (=prvý nenulový) prvok každého riadku matice je 1.
- Každý stĺpec obsahujúci vedúci prvok niektorého riadku má prvky v ostatných riadkoch nulové.
- Nulové riadky ležia pod nenulovými riadkami.
- vedúce jednotky sú usporiadané „zľava doprava“.

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \boxed{1} & * & 0 & * & 0 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & * & 0 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Ak je matica v redukovanom tvare, tak jej nenulové riadky sú lineárne nezávislé.

Matice A a B sú riadkovo ekvivalentné práve vtedy, keď

- A aj B sú riadkovo ekvivalentné s tou istou redukovanou trojuholníkovou maticou;
- $V_A = V_B$ (t.j. ich riadky generujú rovnaký podpriestor).

Väčšina úloh, ktoré sú tu, sa dá riešiť použitím elementárnych riadkových operácií alebo úpravou na redukovaný tvar. (Samozrejme, nie je to jediná možnosť ako ich riešiť.)

V nasledujúcich úlohách, ak nie je uvedené inak, uvažujeme matice nad poľom $\mathbb{R}$.

Úloha 1. Nájdite redukované trojuholníkové matice riadkovo ekvivalentné s nasledujúcimi maticami a) nad poľom $\mathbb{R}$ b) nad poľom $\mathbb{Z}_5$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Úloha 2. Ak sa to dá, doplňte dané vektory na bázu vektorového priestoru $(\mathbb{Z}_5)^4$:

- a) $(1, 2, 0, 0)$, $(3, 4, 0, 1)$
- b) $(1, 2, 3, 4)$, $(1, 1, 1, 1)$, $(3, 2, 1, 0)$
- c) $(2, 3, 4, 1)$, $(3, 2, 4, 1)$, $(0, 2, 3, 2)$
- d) $(1, 3, 1, 4)$, $(3, 0, 4, 3)$, $(2, 3, 1, 1)$

Úloha 3. Ak sa to dá, doplňte dané vektory na bázu priestoru $S = [(1, 0, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0, 2), (0, 0, 1, 0, 1), (0, 0, 0, 1, 3)] \subseteq (\mathbb{Z}_5)^5$.

- a) $\vec{\alpha}_1 = (1, 2, 1, 1, 4)$, $\vec{\alpha}_2 = (2, 4, 2, 1, 0)$
- b) $\vec{\alpha}_1 = (1, 1, 2, 4, 2)$, $\vec{\alpha}_2 = (3, 3, 2, 2, 0)$
- c) $\vec{\alpha}_1 = (1, 3, 2, 0, 4)$, $\vec{\alpha}_2 = (2, 1, 4, 0, 3)$
- d) $\vec{\alpha}_1 = (1, 2, 3, 3, 1)$, $\vec{\alpha}_2 = (2, 3, 0, 0, 3)$

Úloha 4. Zistite, či nasledujúce matice tvoria bázu vektorového priestoru všetkých matíc typu 2×2 nad poľom $\mathbb{R}$:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Úloha 5. Zistite, ktoré z daných vektorov patria do podpriestoru $[(1, 4, 1, 0), (2, 3, -2, -3), (0, 2, -5, -6)]$ priestoru $\mathbb{R}^4$: a) $(4, 11, -3, -3)$, b) $(1, 0, 11, 12)$, c) $(3, 0, 4, 1)$, d) $(1, -1, 2, -2)$.

Úloha 6. Zistite, či $[\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2] \subseteq [\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2, \vec{\gamma}_3]$ vo vektorovom priestore $\mathbb{R}^4$ nad poľom $\mathbb{R}$, ak $\vec{\gamma}_1 = (1, 1, 5, 1)$, $\vec{\gamma}_2 = (1, 0, 2, 1)$, $\vec{\gamma}_3 = (2, 1, 0, 1)$, $\vec{\beta}_1 = (1, 1, 5, 1)$ a $\vec{\beta}_2 = (-1, 1, -6, -2)$.

Úloha 7. Zistite hodnoty matíc

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Úloha 8. Upravte danú maticu nad poľom $\mathbb{R}$ na redukovaný trojuholníkový tvar a určte hodnotu matice

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & -4 & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & 1 & 10 & 0 & 0 \\ 5 & 15 & 2 & 25 & -1 & -4 \\ 3 & 9 & 1 & 15 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

Úloha 9. Určte hodnotu danej matice v závislosti od parametra $c \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & c & -1 & 2 \\ 2 & -1 & c & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & c & 2c \\ 1 & -1 & 3 & -c \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & c+1 & 0 \\ 2 & c-1 & 2c \\ c & c & c \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & c+1 & 0 \\ 4 & c-1 & 2c \\ c & c & c \end{pmatrix}$$

Úloha 10. Zistite, či priestor $[(2,4,4,2,4), (3,1,1,2,2), (4,3,3,2,0)]$ je podpriestor priestoru $[(1,1,0,1,4), (2,1,3,3,1), (3,2,1,1,3)]$ a) nad $\mathbb{Q}$, b) nad $\mathbb{Z}_5$, c) nad $\mathbb{Z}_7$.

Úloha 11. Zistite, ktoré z daných matíc sú navzájom riadkovo ekvivalentné:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Úloha 12. Nájdite bázu daného podpriestoru a určte jeho dimenziu:

- a) $[(1, 1, 0, -1), (0, 1, 2, 1), (1, 0, 1, -1), (1, 1, -6, -3), (-1, -5, 1, 0)]$ v $\mathbb{R}^4$;
- b) $[(1, 2, 2, 0, 1), (1, 2, 0, 1, 2), (1, 2, -2, 1, 0)]$ v $\mathbb{R}^5$
- c) $[(1, 2, 2, 0, 1), (1, 2, 0, 1, 2), (1, 2, 3, 1, 0)]$ v $\mathbb{Z}_5^5$
- d) $[(1, 2, 2, 0, 1), (1, 2, 0, 1, 2), (1, 2, 3, 1, 0)]$ v $\mathbb{Z}_7^5$.

Úloha 13. Zistite, pre aké hodnoty parametra c sú dané vektory lineárne závislé

- a) $(-1, 0, -1), (2, 1, 2), (1, 1, c)$ v $\mathbb{R}^3$;
- b) $(1, 1, 3), (2, 1, 2), (c, 0, -c)$ v $\mathbb{R}^3$;
- c) $(2, 0, -1), (3, 2, 0), (1, -2, c)$ v $\mathbb{R}^3$.

Úloha 14*. Určte hodnotu matice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n & a_{n+1} \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 & a_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n & a_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

ak viete, že $a_1, \dots, a_{n+1}$ sú navzájom rôzne reálne čísla (t.j. $a_i \neq a_j$ pre všetky $i \neq j$).

Pri riešení tejto úlohy môžete použiť fakt, že elementárne stĺpcové operácie nemenia hodnotu, resp. to, že $h(A) = h(A^T)$. (Tento fakt dokážeme neskôr.) Ale mala by sa dať vyriešiť aj bez použitia tejto veci.

Úloha 15. Zistite hodnotu matice

$$A = \begin{pmatrix} b & b & b-a \\ a-b & -b & a \\ a+b & b & 0 \end{pmatrix}$$

v závislosti od hodnôt parametrov $a, b \in \mathbb{R}$. (Opäť, ak sa vám to bude hodiť, môžete použiť fakt, že $h(A) = h(A^T)$.)