

Jadro a obraz

Ak $f: V \rightarrow W$ je lineárne zobrazenie, tak platí

$$\dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f) = \dim(V),$$

kde

$$\begin{aligned}\text{Ker } f &= \{\vec{x} \in V; f(\vec{x}) = \vec{0}\}, \\ \text{Im } f &= \{f(\vec{x}); \vec{x} \in V\}.\end{aligned}$$

Úloha 1. Nech $f: V \rightarrow W$ je lineárne zobrazenie z vektorového priestoru V do vektorového priestoru W nad poľom F . Dokážte:

Ak S je podpriestor vektorového priestoru V , tak $f[S] = \{f(\vec{\alpha}); \vec{\alpha} \in S\}$ je podpriestor vektorového priestoru W .

Ak T je podpriestor vektorového priestoru W , tak $f^{-1}[T] = \{\vec{\alpha} \in V : f(\vec{\alpha}) \in T\}$ je podpriestor vektorového priestoru V .

Úloha 2. Nech $f: V \rightarrow W$ je lineárne zobrazenie z vektorového priestoru V do vektorového priestoru W nad poľom F . Dokážte, že $\text{Ker } f$ je podpriestor priestoru V a $\text{Im } f$ je podpriestor priestoru W .

Úloha 3. Nech $f: V \rightarrow W$ je lineárne zobrazenie z vektorového priestoru V do vektorového priestoru W nad poľom F . Dokážte, že:

- a) Zobrazenie f je injektívne práve vtedy, keď $\text{Ker } f = \{\vec{0}\}$.
- b) Zobrazenie f je surjektívne práve vtedy, keď $\text{Im } f = W$.

Úloha 4. Nájdite bázu obrazu a bázu jadra lineárneho zobrazenia $f: (\mathbb{Z}_5)^4 \rightarrow (\mathbb{Z}_5)^4$ s danou maticou. V ktorých prípadoch je toto zobrazenie surjektívne a v ktorých injektívne?

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Úloha 5. Nájdite bázu a dimenziu $\text{Ker } f$ aj $\text{Im } f$ pre dané lineárne zobrazenie. Rozhodnite, či toto zobrazenie je injektívne, surjektívne, bijektívne.

- a) $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4, 2x_2 + x_3 + x_4, 4x_2 + 2x_3 + 2x_4)$.
- b) $f: M_{2,2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2,2}(\mathbb{R})$, $f: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a+b & b+c \\ c+d & d+a \end{pmatrix}$
- c) $f: M_{2,2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2,2}(\mathbb{R})$, $f(A) = A - A^T$
- d) $f: V \rightarrow V$, kde $V = \{ax^2 + bx + c; a, b, c \in \mathbb{R}\}$ je podpriestor $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ a $f: p(x) \mapsto p'(x)$. (T.j. f priradí polynómu $p(x)$ jeho deriváciu.)

Úloha 6. Definujme lineárne zobrazenie $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ako $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4, 2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4)$ a označme $U_1 = \text{Ker } f$.

Ďalej definujme lineárne zobrazenie $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ako $g(y_1, y_2) = (y_1 - y_2, y_1 - 3y_2, 2y_1 - 8y_2, 3y_1 - 27y_2)$ a označme $U_2 = \text{Im } g$.

Vidíme, že U_1 aj U_2 sú podpriestory $\mathbb{R}^4$.

Nájdite bázy priestorov U_1 , U_2 , $U_1 \cap U_2$ a $U_1 + U_2$.

Nech $f: V \rightarrow V$ je lineárne zobrazenie. Ako f^2 budeme označovať $f \circ f$. Dokážte

- a) $\text{Ker } f^2 \supseteq \text{Ker } f$,
- b) $\text{Im } f^2 \subseteq \text{Im } f$,
- c) $f^2 = 0 \Leftrightarrow \text{Ker } f \supseteq \text{Im } f$.

Úloha 7. Nech $V_{1,2,3}$ sú vektorové priestory, $f: V_1 \rightarrow V_2$ a $g: V_2 \rightarrow V_3$ sú lineárne zobrazenia.

a) Dokážte, že platí

$$\text{Ker}(f) \subseteq \text{Ker}(g \circ f).$$

b) Ukážte na konkrétnom príklade, že vo všeobecnosti nemusí platiť $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(g \circ f)$.

c) Čo by ste vedeli povedať o prípade, keď g je injektívne?

Úloha 8. Nájdite $\text{Ker } T_A$, $\text{Im } T_A$, kde $T_A: M_{2,2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2,2}(\mathbb{R})$ je dané predpisom

$$T_A(X) = AX - XA$$

pre $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, t.j.,

$$T_A(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} X - X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nech A je ľubovoľná matica typu $n \times n$ nad poľom F . Označme $T_A(X) = AX - XA$.

a) Ukážte, že $T_A: M_{n,n}(F) \rightarrow M_{n,n}(F)$ je lineárne zobrazenie.

b) Je T_A injektívne?

c) Je T_A surjektívne?