

1 Binárne operácie

Úloha 1.1. Vypíšte všetky možné binárne operácie na množine $\{0, 1\}$. Ktoré z nich sú asociatívne, komutatívne, majú neutrálny prvok? Pre ktoré existuje ku každému prvku aj inverzný?

Úloha 1.2. Dokážte, že ak $\circ$ je binárna operácia na množine A a $\circ$ je asociatívna, tak ľubovoľné uzátvorkovanie výrazu $a \circ b \circ c \circ d$ predstavuje ten istý prvok.¹

Úloha 1.3. Na $\mathbb{R}$ definujeme binárnu operáciu $*$ predpisom $x * y = x \cdot y^2$ (kde $\cdot$ je násobenie reálnych čísel). Má táto operácia neutrálny prvok? Ak má, nájdite ho. Je operácia $*$ asociatívna? Je komutatívna?

Úloha 1.4. Pre dve reálne čísla a, b definujeme

$$a * b = \frac{a + b}{2},$$

t.j. výsledkom je ich priemer. Je to binárna operácia na $\mathbb{R}$? Je táto operácia komutatívna? Je asociatívna? Má neutrálny prvok?

Úloha 1.5*. Ak viete, že ide o tabuľku asociatívnej binárnej operácie, doplňte chýbajúce výsledky (ak sa to dá).

	a	b	c
a	b	a	c
b			
c			

2 Grupy

$(G, *)$ je grupa, ak $*$ je binárna operácia na G a ďalej platí: Binárna operácia $*$ je asociatívna (A). V G existuje neutrálny prvok pre túto operáciu (N). Pre každý prvok $z \in G$ existuje inverzný prvok (I).

$$(\forall a, b, c \in G) a * (b * c) = (a * b) * c \quad (\text{A})$$

$$(\exists e \in G)(\forall a \in G) a * e = e * a = a \quad (\text{N})$$

$$(\forall a \in G)(\exists b \in G) a * b = b * a = e \quad (\text{I})$$

O komutatívnej grupe (abelovskej grupe) hovoríme, ak operácia $*$ je navyše komutatívna.

$$(\forall a, b \in G) a * b = b * a \quad (\text{K})$$

Úloha 2.1. Ktoré z uvedených množín tvoria vzhľadom na dané operácie grupu? V ktorých prípadoch je táto grupa komutatívna?

- a) $(\mathbb{Z}, \cdot)$ (celé čísla s obvyklým násobením)
- b) $(\mathbb{R}, \cdot)$ (reálne čísla s obvyklým násobením)
- c) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, d) $(\mathbb{C}, +)$, e) $(\mathbb{C}, \cdot)$, f) $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$
- g) $(\mathbb{R}^2, +)$ (so sčítaním definovaným po zložkách)
- h) $\mathbb{R}$ s operáciou $*$, $a * b = a + b - 1$
- i) $\mathbb{R}$ s operáciou $*$, $a * b = ab + a + b$

¹Máme tu na mysli uzátvorkovania *bez výmeny poradia*, ktoré už jednoznačne určujú výsledok operácie. Aspoň bez dôkazu spomeniem, že to isté platí aj pre ľubovoľný počet prvkov. Počet uzátvorkovaní výrazu s n prvkami je n -té *Catalanove číslo*.

- j) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ s operáciou $*$, $a * b = ab + a + b$
 k) Množina všetkých párnych celých čísel vzhľadom na sčítovanie.
 l) Množina všetkých nepárnych celých čísel vzhľadom na sčítovanie.
 m) $(\mathbb{Z}_5, \oplus)$
 (Pozri aj úlohu 2.2 – táto úloha sú v postate inak sformulované časti i) a j).)

Úloha 2.2. Je $(\mathbb{R}, *)$, kde $a * b = ab + a + b$, grupa? Ak nie, vedeli by ste vynechať niektorý prvok a z množiny $\mathbb{R}$ tak, aby $(\mathbb{R} \setminus \{a\}, *)$ bola grupa?

V úlohách 2.3, 2.4 a 2.15 vidíme príklady grúp, ktoré nie sú komutatívne.

Úloha 2.3. Tvoria všetky permutácie na konečnej množine M s operáciou skladania zobrazení grupu? Je táto grupa komutatívna? Urobte tabuľku grupovej operácie v prípade $M = \{1, 2, 3\}$.

Tabuľka grupy $(S_3, \circ)$:

	id	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
id	id	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	id	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	id	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	id	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	id	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	id

Úloha 2.4. Nech G je množina všetkých funkcií $f_{a,b}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ktoré sú tvaru $f_{a,b}(x) = ax + b$ pre nejaké reálne čísla $a, b \in \mathbb{R}$. Tvoria táto množina funkcií s operáciou skladania zobrazení grupu? Je množina $\{f_{a,b}; a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ s operáciou skladania zobrazení grupa? Dostaneme grupu, ak vezmeme len také $a, b \in \mathbb{R}$, že $a = 1$? V tých prípadoch, keď dostaneme grupu, je táto grupa komutatívna?

Úloha 2.5. Ak $(G, \circ)$ je grupa a $a \in G$ je nejaký jej prvok, tak zobrazenie $f_a: G \rightarrow G$ definované ako $f_a(x) = a \circ x$ je bijekcia.

Úloha 2.6. Nech $(G, \circ)$ je grupa. Dokážte, že zobrazenie $f: G \rightarrow G$ definované ako $f(x) = x^{-1}$ je bijekcia.

Úloha 2.7*. Nech G je neprázdna množina a $\circ$ je asociatívna binárna operácia na G . Potom G je grupa práve vtedy, keď pre ľubovoľné $a, b \in G$ majú rovnice

$$\begin{aligned} a \circ x &= b \\ y \circ a &= b \end{aligned}$$

riešenie v G (inými slovami, pre ľubovoľné $a, b \in G$ existujú $x, y \in G$, ktoré spĺňajú tieto dve rovnosti.)

Úloha 2.8*. Nech G je konečná množina a $\circ$ je binárna operácia na G taká, že platí asociatívny zákon a zákony o krátení. Dokážte, že G je grupa.

Úloha 2.9*. Dokážte, že v konečnej grupe, ktorá má párny počet prvkov, existuje prvok rôzny od neutrálneho prvku taký, že $a \circ a = e$.

Úloha 2.10. Nech konečná množina $G = \{e, a_1, \dots, a_n\}$ tvorí s operáciou $*$ komutatívnu grupu a e je jej neutrálny prvok. Dokážte, že $(a_1 * a_2 * \dots * a_n)^2 = e$.

Úloha 2.11. Nech $*$ je binárna operácia na množine A , taká, že pre každé $a, b, c \in A$ platí $a * (b * c) = (a * c) * b$ a $*$ má neutrálny prvok. Dokážte, že operácia $*$ je komutatívna a asociatívna.

Úloha 2.12. Nech $(G, \circ)$ je grupa. Dokážte, že ak $x \circ x = x$, tak $x = e$.

Úloha 2.13. Overte, že $G \times H$ spolu s operáciou $*$ definovanou ako

$$(a, b) * (a', b') = (a *_G a', b *_H b')$$

tvorí grupu pre ľubovoľné grupy $(G, *_G)$ a $(H, *_H)$.

Úloha 2.14. Zistite, či $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \square)$, kde pre každé $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ definujeme $(a, b) \square (c, d) = (2ac, b + d)$, je grupa. (Môžete sa zamyslieť aj nad tým, či vám riešenie tejto úlohy nezjednoduší, ak už poznáte výsledok z úlohy 2.13.)

Úloha 2.15. Nech $G = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Definujme na tejto množine binárnu operáciu $*$ predpisom $(a, b) * (c, d) = (a + bc, bd)$. Je to skutočne binárna operácia? Je $(G, *)$ grupa? Je to komutatívna grupa?

V súvislosti s úlohami 2.4 a 2.15 sa môžete zamyslieť aj nad tým, či tieto dve grupy nejako nazvávajú súvisia.

	a	b	c	d
a				
b				d
c			d	
d				

Úloha 2.16. Doplňte nasledujúcu tabuľku tak aby ste dostali grupu.

Úloha 2.17. Ak pre každý prvok x grupy $(G, \circ)$ platí $x \circ x = e$, tak táto grupa je komutatívna.

Úloha 2.18. Je množina $\mathbb{Q}$ s operáciou $\triangleleft$ definovanou ako $a \triangleleft b = ab - a$ grupa? Je táto operácia komutatívna? Má ľavý neutrálny prvok? Má pravý neutrálny prvok?

Úloha 2.19. Nech $*$ je asociatívna binárna operácia na množine M , ktorá má neutrálny prvok e . Ak pre nejaké $x \in M$ platí $x * x = x$ a ku x existuje ľavý inverzný prvok, tak $x = e$.

Úloha 2.20*. Nech $*$ je binárna operácia na množine G , ktorá

a) je asociatívna,

b) má ľavý neutrálny prvok t.j. existuje prvok $e \in G$ taký, že $(\forall x \in G) e * x = x$

c) pre každý prvok $x \in G$ existuje $y \in G$ také, že $y * x = e$ (kde e označuje prvok z časti b) t.j.

$$(\forall x \in G)(\exists y \in G) y * x = e$$

(stručne môžeme povedať, že ku každému prvku existuje ľavý inverzný prvok vzhľadom na e).

Dokážte, že potom $(G, *)$ je grupa.

Úloha 2.21. Nech G je konečná grupa, $|G| = n$. Neutrálny prvok tejto grupy označme e a jej prvky označme ako $a_1, \dots, a_n$ (t.j. $G = \{a_1, \dots, a_n\}$).

a) Ukážte, že pre ľubovoľné $a \in G$ platí $G = \{aa_1, \dots, aa_n\}$.

b) Predpokladajme, že G je navyše aj komutatívna grupa. Ukážte, že pre ľubovoľné $a \in G$ platí $a^n = e$.

(Poznámka: Takéto tvrdenie platí aj pre nekomutatívnej grupy – v tom prípade ale treba použiť iný argument. Dá sa to odvodiť napríklad ako dôsledok Lagrangeovej vety.)

Do istej miery podobnými úvahami ako v predošlej úlohe sa dá prísť aj na takéto tvrdenie:

Úloha 2.22. Nech G je konečná n -prvková množina, jej prvky označme ako $a_1, \dots, a_n$ (t.j. $G = \{a_1, \dots, a_n\}$). Nech ďalej $*$ je binárna operácia na G , ktorá má neutrálny prvok e , je asociatívna, komutatívna a platia pre ňu zákony o krátení.

a) Ukážte, že pre ľubovoľné $a \in G$ platí $G = \{aa_1, \dots, aa_n\}$.

b) Ukážte, že pre ľubovoľné $a \in G$ platí $a^n = e$.

(Poznámka: Z rovnosti $a^n = e$ vieme vyčítať to, že ku e existuje inverzný prvok.)

1 Polia

Množina F s binárnymi operáciami $+$ a $\cdot$ tvorí pole, ak:

- (i) $(F, +)$ je komutatívna grupa, jej neutrálny prvok budeme označovať 0;
- (ii) $(F \setminus \{0\}, \cdot)$ je komutatívna grupa, jej neutrálny prvok budeme označovať 1;
- (iii) pre ľubovoľné $a, b, c \in F$ platí

$$\begin{aligned}a(b + c) &= ab + ac, \\(a + b)c &= ac + bc.\end{aligned}$$

(Túto vlastnosť nazývame *distributívnosť*.)

Ekvivalentne môžeme túto definíciu prepísať pomocou takýchto podmienok:

- (i) pre všetky $a, b, c \in F$ platí $a + (b + c) = (a + b) + c$,
- (ii) pre všetky $a, b \in F$ platí $a + b = b + a$,
- (iii) existuje prvok $0 \in F$ taký, že pre každé $a \in F$ sa $a + 0 = a$,
- (iv) ku každému $a \in F$ existuje $b \in F$ tak, že $a + b = 0$,
- (v) pre všetky $a, b, c \in F$ platí $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$,
- (vi) pre všetky $a, b \in F$ platí $a \cdot b = b \cdot a$,
- (vii) existuje prvok $1 \in F$ taký, že $1 \neq 0$ a pre každé $a \in F$ sa $a \cdot 1 = a$,
- (viii) ku každému $a \in F$, $a \neq 0$ existuje $b \in F$ tak, že $a \cdot b = 1$,
- (ix) pre všetky $a, b, c \in F$ sa $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Úloha 1.1. Ktoré z uvedených množín tvoria spolu s obvyklým sčítaním a násobením pole?

a) $F = \{a + ib; a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, b \geq 0\}$

b) $F = \{a + ib; a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}\}$

c) $F = \{a + ib; a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$

d) $F = \{a + b\sqrt{2}; a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}\}$

e) $F = \{a + b\sqrt{5}; a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}\}$

f) $F = \{a + \sqrt{3}ib; a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}\}$

g) $F = \{a + \frac{b}{\sqrt{2}}; a, b \in \mathbb{Q}\}$

h*) $F = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}; a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$ (Hint: Možno pomôže prepísať si túto množinu do tvaru $F = \{a + b\sqrt{3}; a, b \in F'\}$, kde $F' = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Q}\}$.)

i*) $F = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}; a, b, c \in \mathbb{Q}\}$

j*) $F = \{a + b\sqrt[3]{5}; a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}\}$

Pri úlohe o $F = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Q}\}$ môže byť užitočné zamyslieť sa najprv nad tým, či vieme zdôvodniť, že pre $a, b \in \mathbb{Q}$ platí:

$$a + b\sqrt{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = b = 0.$$

(Platilo by to aj bez predpokladu, že a, b sú racionálne?)

Tiež si môžeme uvedomiť, že potom pre $a, b, a', b' \in \mathbb{Q}$ už ľahko dostaneme

$$a + b\sqrt{2} = a' + b'\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad a = a' \wedge b = b'.$$

Úloha 1.2. Na $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ definujeme operácie $+$ a $\cdot$ takto:

- a) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ a $(a, b) \cdot (c, d) = (ac + 3bd, ad + bc)$,
 b) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ a $(a, b) \cdot (c, d) = (ac + 2bd, ad + bc)$.
 c) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ a $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - 5bd, ad + bc)$.

Je potom $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, +, \cdot)$ pole?

Úloha 1.3. V poli $\mathbb{Z}_5$ vyrátajte $2^{-1} \oplus 4$, $(-2) \oplus 4$, $2^{-1} \odot 3$ a $-4 \odot 3^{-1}$.

Úloha 1.4. V $\mathbb{Z}_5$ vyrátajte 2^3 , $(2^{-1})^4$, $2 \odot (4^{-1})^3$, $(4 \odot 2^{-1})^3$, $(-1)^5 \odot (4 \odot 3^{-1})^2$.

Úloha 1.5. V ľubovoľnom poli F platí:

$$\begin{aligned} a + b &= a + c \Rightarrow b = c \\ (a + b)(c + d) &= ac + ad + bc + bd \\ -(-a) &= a \\ -0 &= 0 \\ -(a + b) &= (-a) + (-b) \\ (a - b)c &= ac - bc \\ 1 &\neq 0 \\ a \cdot a = 1 &\Leftrightarrow a = 1 \vee a = -1 \\ a^2 = b^2 &\Leftrightarrow a = b \vee a = -b \\ a \cdot (b_1 + \dots + b_n) &= a \cdot b_1 + \dots + a \cdot b_n \end{aligned}$$

Úloha 1.6. Na množine $\mathbb{R}^+$ všetkých kladných reálnych čísel zdefinujeme operácie $\oplus$ a $\odot$ tak, že $x \oplus y = x \cdot y$ a $x \odot y = x^y$. Ktoré z axiém pola spĺňa $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$? (Pričom $x \cdot y$ označuje obvyklé násobenie a x^y obvyklé umocňovanie.)

Úloha 1.7. Nech F je pole a $a \in F$. Definujeme zobrazenie $f_a: F \rightarrow F$ tak, že $f_a(b) = a + b$. Je f_a bijekcia? Ak áno, ako vyzerá zobrazenie f_a^{-1} ? Čomu sa rovná $f_a \circ f_b$?

Ďalej definujeme $g_a: F \rightarrow F$ pre $a \neq 0$ tak, že $g_a(b) = a \cdot b$. Je to bijekcia?

Úloha 1.8. Nech na množine $M = \{0, 1\}$ sú operácie $+$ a $\cdot$ dané tabuľkami

$+$	0	1	$\cdot$	0	1
0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1

Ukážte, že $(M, +)$ a $(M \setminus \{0\}, \cdot)$ sú komutatívne grupy a že platí distributívny zákon $(a + b)c = ac + bc$. Je $(M, +, \cdot)$ pole?

Úloha 1.9. Zistite, či $(\mathbb{R}, +, *)$, kde $+$ je obvyklé sčítanie reálnych čísel a pre každé $a, b \in \mathbb{R}$ $a * b = -2ab$, je pole.

Úloha 1.10*. Pre ktoré prvky a pola $\mathbb{Z}_7$ má riešenie rovnica $x^2 = a$? Koľko je takých prvkov v poli $\mathbb{Z}_{109}$?

Úloha 1.11*. Dokážte, že:

- a) V ľubovoľnom poli platí $(a+b)^m = a^m + \binom{m}{1} \times a^{m-1}b + \binom{m}{2} \times a^{m-2}b^2 + \dots + \binom{m}{m-1}ab^{m-1} + b^m$. (Súčet na pravej strane sa zvykne označovať takto: $\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \times a^{m-k}b^k$.)
 b) V poli $\mathbb{Z}_p$ platí: $(a \oplus b)^p = a^p \oplus b^p$.

Úloha 1.12*. Pomocou úlohy 1.11 dokážte matematickou indukciou vzhľadom na a , že v $\mathbb{Z}_p$ platí rovnosť $a^p = a$ (pre ľubovoľné $a \in \mathbb{Z}_p$). (Toto je vlastne iná formulácia malej Fermatovej vety.)

Úloha 1.13. Nech F je konečné pole a platí $|F| = n$. Ukážte, že potom pre každý prvok $a \in F \setminus \{0\}$ platí $a^{n-1} = 1$. (Týmto sme súčasne získali aj iné odvodenie malej Fermatovej vety.)

Úloha 1.14. Majme štvorprvkovú množinu $F = \{0, 1, a, b\}$ a binárne operácie $+$, $\cdot$ na tejto množine. Ak viete, že $(F, +, \cdot)$ je pole, tak doplňte zvyšok zadaných tabuliek:

$+$	0	1	a	b	$\cdot$	0	1	a	b
0	0	1	a	b	0	0	0	0	0
1		0			1	0	1	a	b
a			0		a				
b				0	b				

T.j. v tabuľkách máme zadané, že $0 + x = x$ a $x + x = 0$ pre všetky $x \in F$. A tiež to, že $0 \cdot x = 0$ a $1 \cdot x = 1$ pre všetky $x \in F$.

Zdôvodnite, prečo váš výsledok je jediná možnosť, ako sa tieto tabuľky dajú doplniť. (To, či na konci naozaj vyšlo pole, overovať nemusíte.)

Poznámka. Jeden z dôvodov, prečo som pridal takýto príklad, je ukázať, že existuje aj štvorprvkové pole. (Z konečných polí ste sa zatiaľ stretli s polami, ktoré majú prvočíselný počet prvkov. Neskôr sa na Algebre 3 dozviete, že existujú aj iné konečné polia a aj to ako všetky také polia vyzerajú. Z toho, čo sa naučíte tam, sa štvorprvkové pole bude dať dostať oveľa jednoduchšie – tu vlastne máme zadanú tabuľku sčítovania a násobenia, ale nevieme, prečo sme ich zobrali akurát takéto.)

1 Vektorové priestory

Definícia 1.1. Nech F je pole a $V \neq \emptyset$ je množina. Nech $+$ je binárna operácia na V a každej dvojici $c \in F$, $\vec{\alpha} \in V$ je priradený prvok $c \cdot \vec{\alpha} \in V$, pričom platí pre ľubovoľné $c, d \in F$ a $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$:

- (i) $(V, +)$ je komutatívna grupa,
- (ii) $c \cdot (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = c \cdot \vec{\alpha} + c \cdot \vec{\beta}$,
- (iii) $(c + d) \cdot \vec{\alpha} = c \cdot \vec{\alpha} + d \cdot \vec{\alpha}$,
- (iv) $(c \cdot d) \cdot \vec{\alpha} = c \cdot (d \cdot \vec{\alpha})$,
- (v) $1 \cdot \vec{\alpha} = \vec{\alpha}$.

Potom hovoríme, že V je *vektorový priestor* nad polom F .

Označenie: $\vec{0}$ = nulový vektor, $-\vec{x}$ = opačný vektor

Príklady vektorových priestorov, ktoré poznáme z prednášky: F^n (usporiadané n -ties) aj F^M (zobrazenia z M do F) sú vektorové priestory nad polom F .

Úloha 1.2. Koľko prvkov má vektorový priestor $(\mathbb{Z}_3)^n$? Čomu sa v tomto priestore rovná $\vec{\alpha} + \vec{\alpha} + \vec{\alpha}$?

Úloha 1.3. Nech V je množina všetkých postupností reálnych čísel. Pre postupnosti $a = (a_n)_{n=1}^\infty$ a $b = (b_n)_{n=1}^\infty$ definujeme $a + b = (a_n + b_n)_{n=1}^\infty$ a $c \cdot a = (c \cdot a_n)_{n=1}^\infty$. Overte, že V s týmito operáciami tvorí vektorový priestor nad polom $\mathbb{R}$.

Úloha 1.4. Overte, že všetky zobrazenia $f: \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ so sčítaním a násobením skalárom definovaným po bodoch tvoria vektorový priestor nad polom $\mathbb{R}$.

Úloha 1.5. Overte, že $\mathbb{R}$ je vektorový priestor nad $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ je vektorový priestor nad $\mathbb{Q}$. Je $\mathbb{C}$ vektorový priestor nad $\mathbb{Z}$?

Úloha 1.6. Zistite, či $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ s operáciami $+$ a $\cdot$ definovanými tak, že $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ pre ľubovoľné $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a $r \cdot (a, b) = (ra, 2rb)$ pre ľubovoľné $r \in \mathbb{R}$, je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$.

Úloha 1.7. Zistite, či $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$ je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$, ak definujeme $x \oplus y = xy$, $c \odot x = x^c$ pre $x, y \in \mathbb{R}^+$, $c \in \mathbb{R}$.

2 Podpriestory

Ak V je vektorový priestor nad polom F , $S \neq \emptyset$ a $S \subseteq V$, tak S je *vektorovým podpriestorom* priestoru V , ak

- (i) pre ľubovoľné $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in S$ platí $\vec{\alpha} + \vec{\beta} \in S$,
- (ii) pre ľubovoľné $\vec{\alpha} \in S$ a $c \in F$ platí $c\vec{\alpha} \in S$.

Kritérium vektorového podpriestoru: Namiesto uvedených dvoch podmienok stačí overiť, že pre ľubovoľné $c, d \in F$ a $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$ platí

$$\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in S \quad \Rightarrow \quad c\vec{\alpha} + d\vec{\beta} \in S. \quad (1)$$

(A ďalšia ekvivalentná charakterizácia podpriestorov je uvedená v úlohe 2.6.)

Podpriestor vektorového priestoru tiež tvorí vektorový priestor.

Každý podpriestor obsahuje nulový vektor.

Úloha 2.1. Ktoré z týchto množín tvoria vektorový podpriestor priestoru $\mathbb{R}^3$?

- a) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 \in \mathbb{Z}\}$
- b) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 = 0\}$
- c) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 = 0 \vee x_2 = 0\}$
- d) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; 3x_1 + 4x_2 = 1\}$
- e) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; 7x_1 - x_2 = 0\}$
- f) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 = x_3\}$
- g) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; |x_1| = |x_2|\}$
- h) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 + x_3 \geq 0\}$
- i) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; 2x_1 = -x_2 = x_3\}$
- j) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$
- k) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}$

Úloha 2.2. Ktoré z týchto podmnožín tvoria vektorový podpriestor priestoru reálnych funkcií $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

- a) funkcie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s vlastnosťou $2f(0) = f(1)$
- b) nezáporné funkcie
- c) funkcie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s vlastnosťou $f(1) = 1 + f(0)$
- d) funkcie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s vlastnosťou $(\forall x \in (0, 1)) f(x) = f(1 - x)$
- e) ohraničené funkcie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- f) spojité funkcie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- h) funkcie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ také, že existuje konečná $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$
- i*) funkcie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ také, že existuje konečná alebo nekonečná $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

Úloha 2.3. Overte, či

- a) množina všetkých polynómov s reálnymi koeficientami,
- b) množina všetkých polynómov s reálnymi koeficientami stupňa najviac n ,
- c) množina všetkých polynómov párneho stupňa,
- d) množina všetkých polynómov stupňa práve n

sú vektorové priestory. Sčítovanie a násobenie skalárom definujeme rovnako ako pre reálne funkcie.

Úloha 2.4. Dokážte, že množina všetkých funkcií $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ktoré sú tvaru $a + b \cos x + c \sin x$ pre nejaké $a, b, c \in \mathbb{R}$ tvoria vektorový podpriestor priestoru všetkých reálnych funkcií $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Úloha 2.5. Nech S, T sú podpriestory vektorového priestoru V nad poľom F . Ukážte, že $S \cup T$ je podpriestor priestoru V práve vtedy, keď $S \subseteq T$ alebo $T \subseteq S$.

Úloha 2.6. Nech V je vektorový priestor nad poľom F a $S \neq \emptyset$ je podmnožina V . Ukážte, že S je podpriestor V práve vtedy, keď pre ľubovoľné $c \in F$ a $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in S$ platí $c\vec{\alpha} + \vec{\beta} \in S$.

1 Lineárne kombinácie, lineárny obal

Lineárny obal je definovaný ako množina všetkých lineárnych kombinácií daných vektorov:

$$[\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n] = \{c_1\vec{\alpha}_1 + c_2\vec{\alpha}_2 + \dots + c_n\vec{\alpha}_n; c_i \in F \text{ pre } i = 1, 2, \dots, n\}$$

Je užitočné si uvedomiť, že:

- Lineárny obal $[\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n]$ je najmenší podpriestor daného vektorového priestoru, ktorý obsahuje vektory $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n$.
- Teda ak S je podpriestor taký, že $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n \in S$, tak $[\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n] \subseteq S$. (Toto je vlastne trochu inak sformulovaný fakt, že podpriestory sú uzavreté vzhľadom na lineárne kombinácie.)
- Vektor $\vec{\beta}$ je lineárna kombinácia vektorov $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n$ práve vtedy, keď

$$[\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n] = [\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n, \vec{\beta}].$$

Čiže pridanie alebo odobratie lineárnej kombinácie neovplyvní lineárny obal.

Úloha 1.1. Nech $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ sú ľubovoľné vektory z vektorového priestoru V nad poľom $\mathbb{R}$. Potom $[\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}] = [\vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{\alpha} - \vec{\beta}, \vec{\gamma}]$.

Úloha 1.2. Nech $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x + 3y + 5z = 0\}$. Ukážte, že M je vektorový podpriestor $\mathbb{R}^3$ a nájdite vektory, ktoré ho generujú.

2 Lineárna nezávislosť

Lineárne závislé vektory: Existujú $c_1, c_2, \dots, c_n \in F$, ktoré nie sú všetky nulové a platí pre ne:

$$c_1\vec{\alpha}_1 + c_2\vec{\alpha}_2 + \dots + c_n\vec{\alpha}_n = \vec{0}.$$

Lineárne nezávislé vektory:

$$c_1\vec{\alpha}_1 + c_2\vec{\alpha}_2 + \dots + c_n\vec{\alpha}_n = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$$

Nie je zlé si uvedomiť, ako to je s lineárnou závislosťou a nezávislosťou, ak máme jeden vektor resp. dva vektory.

Úloha 2.1. Množina $\{\vec{\alpha}\}$ je lineárne nezávislá práve vtedy, keď $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$. Dva vektory $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ sú lineárne závislé práve vtedy, keď jeden z nich je násobkom druhého (t.j. existuje $c \in F$ tak, že $c\vec{\alpha} = \vec{\beta}$), alebo jeden z nich je $\vec{0}$.

Ak vektory $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ sú lineárne nezávislé, tak $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ sú lineárne závislé práve vtedy, keď $\vec{\gamma}$ je lineárna kombinácia vektorov $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

Úloha 2.2. Zistite, či dané vektory sú lineárne závislé v príslušnom vektorovom priestore:

- (1,2,3), (1,3,2), (2,1,5) v $\mathbb{R}^3$,
- (1,2,3), (1,3,2), (2,1,5), (1,127,3) v $\mathbb{R}^3$,
- (1,3,4), (2,1,3), (3,1,4) v $\mathbb{Z}_5^3$,
- (1,3,4), (2,1,3), (3,1,4) v $\mathbb{Z}_7^3$.

V niektorých častiach nasledujúcej úlohy budeme využívať fakt, že polynóm sa rovná nule práve vtedy, keď všetky koeficienty sú nulové.¹ (Ale mali by sme ju vedieť vyriešiť aj bez neho.)

¹<https://msleziak.com/forum/viewtopic.php?t=1349>

Úloha 2.3. Zistite, či sú nasledujúce funkcie lineárne závislé vo vektorovom priestore všetkých funkcií z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$:

- a) $x + 1, x^2, x^3$,
- b) $1, x + a, x^2 + bx + c$ (a, b, c môžu byť ľubovoľné reálne čísla),
- c*) $1, \cos x, \cos^2(\frac{x}{2})$,
- d) $x, x(x - 1), x(x - 1)(x - 2)$,
- e) $1, \cos x, \cos 2x$.

Úloha 2.4. Ak $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ sú lineárne nezávislé vo vektorovom priestore V nad poľom $\mathbb{R}$, tak aj $\vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{\alpha} + \vec{\gamma}, \vec{\beta} + \vec{\gamma}$ sú lineárne nezávislé. (Platilo by to aj vo vektorovom priestore nad poľom $\mathbb{Z}_2$?)

Úloha 2.5*. Overte, že $\mathbb{R}$ je vektorový priestor nad poľom $\mathbb{Q}$. Dokážte, že v tomto priestore sú $1, \sqrt{2}$ a $\sqrt{3}$ lineárne nezávislé.

Úloha 2.6. Ukážte, že vo vektorovom priestore $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$ (z predošlej úlohy) sú lineárne nezávislé vektory $1 + 3\sqrt{2}$ a $2 - \sqrt{2}$.

Úloha 2.7*. Sú $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$ lineárne nezávislé vo vektorovom priestore $\mathbb{R}$ nad poľom $\mathbb{Q}$? (Hint: Úlohu môže o niečo zjednodušiť, ak sa pozriete na 1 a $\sqrt{3}$ ako prvky priestoru $\mathbb{R}$ nad poľom $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Q}\}$.)

Úloha 2.8. Nech $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ sú ľubovoľné vektory. Zistite, či sú tieto systémy vektorov lineárne závislé:

- a) $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{\gamma}$, b) $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{0}$, c) $\vec{\alpha}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$, d) $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}, \vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{\alpha} + \vec{\gamma}, \vec{\beta} + \vec{\gamma}$.

Úloha 2.9. Nech vektory $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ sú lineárne nezávislé vektory v nejakom vektorovom priestore nad poľom $\mathbb{R}$. Sú aj vektory $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_1 + 2\vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_1 + 2\vec{\alpha}_2 + \dots + n\vec{\alpha}_n$ lineárne nezávislé?

Báza a dimenzia

Vektory $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ tvoria bázu vektorového priestoru V , ak sú *lineárne nezávislé* a *generujú celý priestor*. Ekvivalentná podmienka: Každý vektor $\vec{\beta} \in V$ sa dá *jednoznačne* vyjadriť ako

$$\vec{\beta} = c_1 \vec{\alpha}_1 + \dots + c_n \vec{\alpha}_n.$$

(T.j. máme jednoznačnosť vyjadrenia ľubovoľného vektora v tvare lineárnej kombinácie báзовých vektorov.)

Ľubovoľné dve bázy vektorového priestoru majú rovnaký počet prvkov. Počet prvkov bázy priestoru V nazývame *dimenzia priestoru* V . Označujeme $\dim(V)$ alebo $d(V)$.

Ak $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n \in V$ a $\dim(V) = n$, tak tieto podmienky sú ekvivalentné:

- $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ je báza priestoru V .
- Vektory $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ sú lineárne nezávislé.
- Platí $[\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n] = V$, t.j. tieto vektory generujú celý priestor.

Inak povedané: Ak už viem, že mám „správny počet vektorov“ – toľko, koľko je dimenzia celého priestoru – tak vlastne stačí overiť jednu z dvoch podmienok, ktoré sa vyskytujú v definícii bázy. Tá druhá je potom splnená „zadarmo“.

Úloha 1. Zistite, či dané vektory tvoria bázu v $\mathbb{R}^3$:

- $(1, 2, 3), (1, -2, 3), (1, 2, -3)$
- $(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1)$
- $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)$

Úloha 2. Zistite, či dané vektory tvoria bázu v $\mathbb{Z}_5^3$:

- $(1, 2, 3), (2, 3, 4), (0, 3, 1)$
- $(1, 0, 0), (0, 1, 2), (2, 1, 3)$
- $(0, 1, 2), (3, 0, 1), (1, 0, 2)$.

Úloha 3. Nájdite dimenziu zadaných podpriestorov priestoru $\mathbb{R}^4$. Nájdite pre každý z nich aspoň jednu bázu.

- $S_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$
- $S_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}$
- $S_3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, x_1 + 2x_3 - x_4 = 0\}$

Úloha 4. Určte dimenziu podpriestoru $[\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}]$, ak $\vec{\alpha} = (1, 3, 2, 1)$, $\vec{\beta} = (4, 9, 5, 4)$ a $\vec{\gamma} = (3, 7, 4, 3)$ v $\mathbb{R}^4$.

Úloha 5. Ako P_n označme priestor všetkých polynómov stupňa najviac n . Overte, že $d(P_n) = n + 1$ a že $1, x - 1, \dots, (x - 1)^n$ je báza tohoto priestoru.

Úloha 6. Ak sa to dá, doplňte dané vektory na bázu príslušného vektorového priestoru:

- $(1, 1, 2), (2, 1, 3)$ v $\mathbb{R}^3$,
- $x^2 - 1, x^2 + 1$ v priestore polynómov stupňa najviac 3,
- $(1, 2, 3, 0), (3, 4, 1, 2)$ v $\mathbb{Z}_5^4$.

Úloha 7. Máme dané vektory $\vec{\alpha}_1 = (1, 1, 2, 0)$, $\vec{\alpha}_2 = (0, 0, 3, 1)$ v priestore $\mathbb{Z}_5^4$. Koľko existuje možností na výber vektorov $\vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_4 \in \mathbb{Z}_5^4$ tak, aby tieto štyri vektory tvorili bázu?

Úloha 8. Ak každý z vektorov $\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_k$ je lineárnou kombináciou vektorov $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_m$, tak $d([\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_k]) \leq d([\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_m])$.

Úloha 9. Overte, že množina $S = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : (\exists a, b \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})f(x) = ax + b\}$ je podpriestor priestoru všetkých funkcií z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Nájdite funkcie $g, h \in S$ také, že $S = [g, h]$.

Úloha 10. Zistite, či $S = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = ax^2 + bx + c, a, b, c \in \mathbb{R}\}$ je vektorový podpriestor priestoru reálnych funkcií. Ak áno, nájdite, $g_1, g_2, g_3 \in S$ také, že $S = [g_1, g_2, g_3]$.

Úloha 11. Pre zadané vektorové priestory nad poľom $\mathbb{R}$ ukážte, že nie sú konečnorozmerné.

a) $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, t.j. priestor všetkých zobrazení $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

b) $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, t.j. priestor všetkých postupností reálnych čísel.

Úloha 12. Nech $M \neq \emptyset$ je nejaká množina a F je pole. Uvažujme vektorový priestor $F^M = \{f: M \rightarrow F\}$ nad poľom F . (Teda prvky V sú všetky zobrazenia z M do F .)

Vedeli by ste nájsť nejakú podmienku na množinu M , ktorá zabezpečí, že tento priestor je nekonečnorozmerný?

Úloha 13*. a) Nech $p_1, \dots, p_k$ sú navzájom rôzne prvočísla. Ukážte, že čísla $\ln p_1, \ln p_2, \dots, \ln p_k$ sú lineárne nezávislé ako prvky vektorového priestoru $\mathbb{R}$ nad poľom $\mathbb{Q}$.

b) Ukážte, že vektorový priestor $\mathbb{R}$ nad poľom $\mathbb{Q}$ je nekonečnorozmerný.¹

¹Keď budeme vedieť nejaké veci o lineárnych izomorfizmoch a tiež o spočítateľných a nespočítateľných množinách, tak by sme mali byť schopní nájsť jednoduchšie zdôvodnenie, že ide o nekonečnorozmerný priestor. Dá sa to však zdôvodniť aj takýmto spôsobom – budeme tu potrebovať využiť nejaké veci o prvočíslach.

Riadková ekvivalencia, úprava na redukovaný tvar

Elementárne riadkové operácie:

- výmena 2 riadkov matice,
- vynásobenie niektorého riadku matice nenulovým prvkom c poľa F ,
- pripočítanie násobku niektorého riadku k inému riadku.

Redukovaný trojuholníkový tvar:

- Vedúci (=prvý nenulový) prvok každého riadku matice je 1.
- Každý stĺpec obsahujúci vedúci prvok niektorého riadku má prvky v ostatných riadkoch nulové.
- Nulové riadky ležia pod nenulovými riadkami.
- vedúce jednotky sú usporiadané „zľava doprava“.

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \boxed{1} & * & 0 & * & 0 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & * & 0 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Ak je matica v redukovanom tvare, tak jej nenulové riadky sú lineárne nezávislé.

Matice A a B sú riadkovo ekvivalentné práve vtedy, keď

- A aj B sú riadkovo ekvivalentné s tou istou redukovanou trojuholníkovou maticou;
- $V_A = V_B$ (t.j. ich riadky generujú rovnaký podpriestor).

Väčšina úloh, ktoré sú tu, sa dá riešiť použitím elementárnych riadkových operácií alebo úpravou na redukovaný tvar. (Samozrejme, nie je to jediná možnosť ako ich riešiť.)

V nasledujúcich úlohách, ak nie je uvedené inak, uvažujeme matice nad poľom $\mathbb{R}$.

Úloha 1. Nájdite redukované trojuholníkové matice riadkovo ekvivalentné s nasledujúcimi maticami a) nad poľom $\mathbb{R}$ b) nad poľom $\mathbb{Z}_5$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Úloha 2. Ak sa to dá, doplňte dané vektory na bázu vektorového priestoru $(\mathbb{Z}_5)^4$:

- a) $(1, 2, 0, 0)$, $(3, 4, 0, 1)$
- b) $(1, 2, 3, 4)$, $(1, 1, 1, 1)$, $(3, 2, 1, 0)$
- c) $(2, 3, 4, 1)$, $(3, 2, 4, 1)$, $(0, 2, 3, 2)$
- d) $(1, 3, 1, 4)$, $(3, 0, 4, 3)$, $(2, 3, 1, 1)$

Úloha 3. Ak sa to dá, doplňte dané vektory na bázu priestoru $S = [(1, 0, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0, 2), (0, 0, 1, 0, 1), (0, 0, 0, 1, 3)] \subseteq (\mathbb{Z}_5)^5$.

- a) $\vec{\alpha}_1 = (1, 2, 1, 1, 4)$, $\vec{\alpha}_2 = (2, 4, 2, 1, 0)$
- b) $\vec{\alpha}_1 = (1, 1, 2, 4, 2)$, $\vec{\alpha}_2 = (3, 3, 2, 2, 0)$
- c) $\vec{\alpha}_1 = (1, 3, 2, 0, 4)$, $\vec{\alpha}_2 = (2, 1, 4, 0, 3)$
- d) $\vec{\alpha}_1 = (1, 2, 3, 3, 1)$, $\vec{\alpha}_2 = (2, 3, 0, 0, 3)$

Úloha 4. Zistite, či nasledujúce matice tvoria bázu vektorového priestoru všetkých matíc typu 2×2 nad poľom $\mathbb{R}$:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Úloha 5. Zistite, ktoré z daných vektorov patria do podpriestoru $[(1, 4, 1, 0), (2, 3, -2, -3), (0, 2, -5, -6)]$ priestoru $\mathbb{R}^4$: a) $(4, 11, -3, -3)$, b) $(1, 0, 11, 12)$, c) $(3, 0, 4, 1)$, d) $(1, -1, 2, -2)$.

Úloha 6. Zistite, či $[\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2] \subseteq [\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2, \vec{\gamma}_3]$ vo vektorovom priestore $\mathbb{R}^4$ nad poľom $\mathbb{R}$, ak $\vec{\gamma}_1 = (1, 1, 5, 1)$, $\vec{\gamma}_2 = (1, 0, 2, 1)$, $\vec{\gamma}_3 = (2, 1, 0, 1)$, $\vec{\beta}_1 = (1, 1, 5, 1)$ a $\vec{\beta}_2 = (-1, 1, -6, -2)$.

Úloha 7. Zistite hodnoty matíc

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Úloha 8. Upravte danú maticu nad poľom $\mathbb{R}$ na redukovaný trojuholníkový tvar a určte hodnotu matice

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & -4 & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & 1 & 10 & 0 & 0 \\ 5 & 15 & 2 & 25 & -1 & -4 \\ 3 & 9 & 1 & 15 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

Úloha 9. Určte hodnotu danej matice v závislosti od parametra $c \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & c & -1 & 2 \\ 2 & -1 & c & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & c & 2c \\ 1 & -1 & 3 & -c \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & c+1 & 0 \\ 2 & c-1 & 2c \\ c & c & c \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & c+1 & 0 \\ 4 & c-1 & 2c \\ c & c & c \end{pmatrix}$$

Úloha 10. Zistite, či priestor $[(2,4,4,2,4), (3,1,1,2,2), (4,3,3,2,0)]$ je podpriestor priestoru $[(1,1,0,1,4), (2,1,3,3,1), (3,2,1,1,3)]$ a) nad $\mathbb{Q}$, b) nad $\mathbb{Z}_5$, c) nad $\mathbb{Z}_7$.

Úloha 11. Zistite, ktoré z daných matíc sú navzájom riadkovo ekvivalentné:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Úloha 12. Nájdite bázu daného podpriestoru a určte jeho dimenziu:

- a) $[(1, 1, 0, -1), (0, 1, 2, 1), (1, 0, 1, -1), (1, 1, -6, -3), (-1, -5, 1, 0)]$ v $\mathbb{R}^4$;
- b) $[(1, 2, 2, 0, 1), (1, 2, 0, 1, 2), (1, 2, -2, 1, 0)]$ v $\mathbb{R}^5$
- c) $[(1, 2, 2, 0, 1), (1, 2, 0, 1, 2), (1, 2, 3, 1, 0)]$ v $\mathbb{Z}_5^5$
- d) $[(1, 2, 2, 0, 1), (1, 2, 0, 1, 2), (1, 2, 3, 1, 0)]$ v $\mathbb{Z}_7^5$.

Úloha 13. Zistite, pre aké hodnoty parametra c sú dané vektory lineárne závislé

- a) $(-1, 0, -1), (2, 1, 2), (1, 1, c)$ v $\mathbb{R}^3$;
- b) $(1, 1, 3), (2, 1, 2), (c, 0, -c)$ v $\mathbb{R}^3$;
- c) $(2, 0, -1), (3, 2, 0), (1, -2, c)$ v $\mathbb{R}^3$.

Úloha 14*. Určte hodnotu matice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n & a_{n+1} \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 & a_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n & a_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

ak viete, že $a_1, \dots, a_{n+1}$ sú navzájom rôzne reálne čísla (t.j. $a_i \neq a_j$ pre všetky $i \neq j$).

Pri riešení tejto úlohy môžete použiť fakt, že elementárne stĺpcové operácie nemenia hodnotu, resp. to, že $h(A) = h(A^T)$. (Tento fakt dokážeme neskôr.) Ale mala by sa dať vyriešiť aj bez použitia tejto veci.

Úloha 15. Zistite hodnotu matice

$$A = \begin{pmatrix} b & b & b-a \\ a-b & -b & a \\ a+b & b & 0 \end{pmatrix}$$

v závislosti od hodnôt parametrov $a, b \in \mathbb{R}$. (Opäť, ak sa vám to bude hodiť, môžete použiť fakt, že $h(A) = h(A^T)$.)

1 Lineárne zobrazenia

Zobrazenie $f: V \rightarrow W$ je lineárne práve vtedy, keď pre ľubovoľné $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$ a ľubovoľné $c \in F$ platí:

$$\begin{aligned} f(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) &= f(\vec{\alpha}) + f(\vec{\beta}) \\ f(c\vec{\alpha}) &= cf(\vec{\alpha}) \end{aligned}$$

Ekvivalentná podmienka:

$$(\forall c, d \in F)(\forall \vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V) f(c\vec{\alpha} + d\vec{\beta}) = cf(\vec{\alpha}) + df(\vec{\beta}).$$

Ďalšia ekvivalentná podmienka je v úlohe 3.3. Súčasne vieme aj to, že lineárne zobrazenie zachováva lineárne kombinácie:

$$f(c_1\vec{\alpha}_1 + \dots + c_n\vec{\alpha}_n) = c_1f(\vec{\alpha}_1) + \dots + c_nf(\vec{\alpha}_n).$$

Základná veta o lineárnych zobrazeniach: Lineárne zobrazenie je jednoznačne určené obrazmi báзовých vektorov.

Z obrazov báзовých vektorov $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ vieme zistiť aj to, či lineárne zobrazenie je:

- injektívne; to je práve vtedy, keď $f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)$ sú lineárne nezávislé.
- surjektívne; $f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)$ generujú W , t.j. $[f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)] = W$.
- bijektívne (t.j. izomorfizmus) práve vtedy, keď $f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)$ je báza priestoru W .

Úloha 1.1. Ukážte, že $f: V \rightarrow W$ je lineárne práve vtedy, keď pre ľubovoľné $c \in F$ a $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$ platí $f(c\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = cf(\vec{\alpha}) + f(\vec{\beta})$.

Úloha 1.2. Nech V a W sú vektorové priestory nad poľom F a $f: V \rightarrow W$ je lineárne zobrazenie. Ak $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ sú lineárne závislé vektory, tak aj $f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)$ sú lineárne závislé vektory.

Úloha 1.3. Nech $f: V \rightarrow W$ je lineárne zobrazenie z vektorového priestoru V do vektorového priestoru W nad poľom F . Dokážte:

Ak S je podpriestor vektorového priestoru V , tak $f[S] = \{f(\vec{\alpha}); \vec{\alpha} \in S\}$ je podpriestor vektorového priestoru W .

Ak T je podpriestor vektorového priestoru W , tak $f^{-1}[T] = \{\vec{\alpha} \in V : f(\vec{\alpha}) \in T\}$ je podpriestor vektorového priestoru V .

2 Súčin matíc

Ak A je typu $m \times [n]$ a B je typu $[n] \times k$, tak súčin $C = AB$ má rozmery $m \times k$ a

$$c_{ij} := a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{t=1}^n a_{it}b_{tj}.$$

Súčin matíc vo všeobecnosti nie je komutatívny. Platia však tieto vlastnosti (za predpokladu, že matice majú také rozmery, aby sa dali násobiť):

$$\begin{aligned} I_m A &= A I_n = A \\ A(BC) &= (AB)C \\ (A+B)C &= AC + BC \\ C(A+B) &= CA + CB \end{aligned}$$

(Teda platí asociatívnosť aj distributívnosť. Násobenie jednotkovou maticou nemení maticu.)

Aj takýto pohľad na súčin je užitočný: Riadky matice AB sú lineárne kombinácie riadkov matice B ; pričom riadky matice A určujú koeficienty týchto lineárnych kombinácií.

Úloha 2.1. Vypočítajte $A^2 + 2AB + B^2$, $A^2 + 2BA + B^2$, $A^2 + AB + BA + B^2$, $(A + B)^2$, ak $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Úloha 2.2. Vyrátajte EA a AE pre $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ a a) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ d) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vedeli by ste nájsť riadkovú/stĺpcovú operáciu, pomocou ktorej dostaneme z matice A maticu EA resp. AE ? (Viac sa o súvisi násobenia matíc a elementárnych riadkových/stĺpcových sa dá nájsť v texte.).

Úloha 2.3. Dokážte:

a) $(AB)^T = B^T A^T$

b) Ak A je symetrická matica, tak aj A^n pre každé $n \in \mathbb{N}$ je symetrická matica.

Úloha 2.4. Pre štvorcovú maticu C typu $n \times n$ budeme výraz $\text{Tr}(C) = \sum_{k=1}^n c_{kk} = c_{11} + c_{22} + \dots + c_{nn}$ nazývať *stopa matice* C .

Ukážte, že ak A, B sú matice typu $n \times n$ nad poľom F , tak platia rovnosti $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(A^T)$ a $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.

Zistite, či pre ľubovoľné matice A, B, C typu $n \times n$ platia vzťahy $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(CBA)$ a $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(ACB)$. (Svoje tvrdenie zdôvodnite!) Ak niektorý z týchto vzťahov neplatí, bude platiť za dodatočného predpokladu, matica A je symetrická?

Úloha 2.5. Dokážte, alebo vyvráťte nasledujúce tvrdenie: Ak A, B sú štvorcové matice typu $n \times n$ a $A^2 = B^2$, tak $A = B$ alebo $A = -B$.

Úloha 2.6. Nech $C = AB$, kde A, B sú matice. Musí potom platiť $V_C \subseteq V_A$? Musí platiť $V_C \subseteq V_B$? Musí platiť $V_A \subseteq V_C$, $V_B \subseteq V_C$? (Svoje tvrdenie zdôvodnite, t.j. dokážte, alebo nájdite kontrapríklad.)

Úloha 2.7. Nech A, B sú matice nad poľom F typu $m \times n$ resp. $n \times k$. Dokážte, že $h(AB) \leq h(A)$. Dokážte, že ak $n = k$ a B je regulárna, tak $h(AB) = h(A)$.

Úloha 2.8. Nech A, B sú matice nad poľom F typu $m \times n$ resp. $n \times k$. Dokážte, že $h(AB) \leq h(B)$. Dokážte, že ak $m = n$ a A je regulárna, tak $h(AB) = h(B)$.

Úloha 2.9*. Nech $A, B \in M_{m,n}(F)$. Dokážte: Matice A, B sú riadkovo ekvivalentné práve vtedy, keď existuje regulárna matica $R \in M_{m,m}(F)$ taká, že $B = RA$.

Úloha 2.10*. Nech A je štvorcová matica (nad nejakým poľom F). Dokážte: Matica A je regulárna práve vtedy, keď A sa dá dostať ako súčin nejakých matíc elementárnych riadkových operácií. (T.j. $A = E_1 E_2 \dots E_k$, kde každá z matíc $E_1, E_2, \dots, E_k$ zodpovedá nejakej ERO.)

3 Matica lineárneho zobrazenia

Matica lineárneho zobrazenia $f: F^n \rightarrow F^k$ je matica typu $n \times k$ nad poľom F , ktorej i -ty riadok je vektor $f(\vec{e}_i)$, t.j. obraz i -teho vektora zo štandardnej bázy.

Súčin matíc a skladanie lineárnych zobrazení – pozor na **poradie**:

$$A_{g \circ f} = A_f \cdot A_g$$

Obraz vektora a súčin:

$$f(\vec{\alpha}) = \vec{\alpha} \cdot A_f$$

Úloha 3.1. Nájdite maticu lineárneho zobrazenia $f: \mathbb{Z}_5^3 \rightarrow \mathbb{Z}_5^2$, ktoré spĺňa uvedené podmienky. (Ak takých matíc existuje viacero, nájdite aspoň jednu. Ak taká matica neexistuje, zdôvodnite to.)

- a) $f(1, 2, 3) = (1, 2)$, $f(2, 1, 3) = (1, 1)$, $f(3, 1, 2) = (4, 1)$
- b) $f(2, 3, 3) = (1, 2)$, $f(1, 1, 3) = (3, 4)$, $f(0, 2, 4) = (0, 3)$
- c) $f(2, 3, 1) = (1, 2)$, $f(4, 1, 3) = (3, 4)$, $f(4, 1, 4) = (2, 4)$
- d) $f(1, 2, 3) = (2, 1)$, $f(2, 3, 1) = (0, 1)$, $f(3, 4, 4) = (3, 1)$
- e) $f(2, 1, 3) = (1, 1)$, $f(3, 3, 1) = (0, 3)$, $f(4, 1, 0) = (4, 4)$
- f) $f(4, 1, 4) = (0, 1)$, $f(2, 1, 3) = (3, 1)$, $f(2, 4, 2) = (2, 1)$
- g) $f(3, 4, 1) = (1, 3)$, $f(1, 3, 1) = (2, 0)$, $f(1, 2, 1) = (3, 1)$, $f(3, 3, 4) = (2, 2)$
- h) $f(1, 4, 2) = (0, 1)$, $f(3, 1, 1) = (1, 4)$

Úloha 3.2. Nájdite maticu lineárneho zobrazenia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, pre ktoré platí:¹

- a) $f(2, 0, 3) = (1, 2, -1, 1)$, $f(4, 1, 5) = (4, 5, -2, 1)$, $f(3, 1, 2) = (1, -1, 1, -1)$,
- b) $f(2, 0, 3) = (1, 2, -1, 1)$, $f(4, 1, 5) = (4, 5, -2, 1)$, $f(2, -1, 4) = (-1, 1, -1, 2)$,
- c) $f(2, 0, 3) = (1, 2, -1, 1)$, $f(4, 1, 5) = (4, 5, -2, 1)$, $f(2, -1, 4) = (1, -1, 1, -1)$.

Úloha 3.3. Ukážte, že $f: V \rightarrow W$ je lineárne práve vtedy, keď pre ľubovoľné $c \in F$ a $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$ platí $f(c\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = cf(\vec{\alpha}) + f(\vec{\beta})$.

Úloha 3.4. Nájdite maticu lineárneho zobrazenia $f: (\mathbb{Z}_7)^2 \rightarrow (\mathbb{Z}_7)^2$ a napíšte jeho predpis.

- a) $f(1, 1) = (0, 1)$, $f(6, 1) = (3, 2)$
- b) $f(2, 3) = (1, 0)$, $f(3, 2) = (6, 1)$

Úloha 3.5. Nájdite maticu lineárneho zobrazenia $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ takého, že:

- a) $f(1, 2, 3, 1) = (1, 3, 1, 0)$, $f(2, 1, 3, 0) = (0, 1, 3, 1)$, $f(3, 2, 1, 0) = (1, 0, 3, 0)$, $f(2, 2, 3, 4) = (3, 1, 0, 4)$
- b) $f(1, 2, 3, 4) = (0, 0, 0, 0)$, $f(2, 1, 3, 1) = (1, 0, 3, 1)$, $f(0, 1, 2, 0) = (2, 0, 1, 0)$, $f(1, 0, 3, 1) = (2, 1, 3, 1)$
- c) $f(0, 1, 1, 1) = (1, 0, 0, 0)$, $f(1, 0, 1, 1) = (0, 1, 0, 0)$, $f(1, 1, 0, 1) = (0, 0, 1, 0)$, $f(1, 1, 1, 0) = (0, 0, 0, 1)$

Úloha 3.6. Koľko existuje lineárnych zobrazení spĺňajúcich zadané podmienky? Koľko z nich je injektívnych? Koľko je surjektívnych?

- a) $f: \mathbb{Z}_5^3 \rightarrow \mathbb{Z}_5^4$, $f(1, 3, 1) = (1, 1, 1, 3)$, $f(2, 1, 3) = (0, 1, 3, 4)$, $f(2, 1, 0) = (1, 4, 0, 0)$;
- b) $f: \mathbb{Z}_5^4 \rightarrow \mathbb{Z}_5^3$, $f(1, 0, 3, 1) = (0, 1, 3)$, $f(2, 1, 3, 1) = (1, 1, 3)$, $f(1, 1, 4, 1) = (2, 2, 1)$;
- c) $f: \mathbb{Z}_5^4 \rightarrow \mathbb{Z}_5^3$, $f(1, 0, 3, 1) = (0, 1, 3)$, $f(2, 1, 3, 1) = (1, 1, 3)$, $f(1, 1, 0, 0) = (1, 0, 0)$;

¹Tento príklad je kompletne vyriešený v texte na webe.

1 Inverzná matica

Úloha 1.1. Dokážte, že ak A, B sú regulárne štvorcové matice rovnakých rozmerov nad tým istým poľom F , tak platí:

- a) $(A^{-1})^{-1} = A$,
 b) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ c) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Úloha 1.2. Nájdite inverznú maticu k daným maticiam nad $\mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & \sqrt{6} \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ Výsledky:}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ -1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 & -9 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Úloha 1.3. Zistite, či je zadaná matica nad poľom $\mathbb{Z}_5$ regulárna; ak áno, nájdite inverznú:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

Výsledky: $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

Úloha 1.4. Nech $f: (\mathbb{Z}_5)^4 \rightarrow (\mathbb{Z}_5)^4$ je lineárne zobrazenie také, že $f(1, 2, 3, 1) = (2, 0, 1, 0)$, $f(0, 2, 3, 1) = (1, 2, 0, 3)$, $f(1, 0, 3, 4) = (3, 2, 1, 0)$, $f(4, 1, 3, 2) = (2, 3, 1, 1)$. Nájdite maticu zobrazenia f^{-1} .

Úloha 1.5. Zistite, či $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ je regulárna a) nad $\mathbb{Z}_2$ b) nad $\mathbb{Z}_3$, ak áno, nájdite inverznú.

Úloha 1.6. Zistite, či pre dané matice A, B nad poľom $\mathbb{Z}_5$ existuje matica X nad tým istým poľom taká, že $AX = B$. Zistite, či je X maticami A, B jednoznačne určená. Ak taká matica existuje, tak aspoň jednu takú maticu nájdite.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

f) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Úloha 1.7. Vypočítajte $A^{-1}B$ a $B^{-1}A$. Skúste to urobiť bez výpočtu A^{-1} resp. B^{-1} .

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ako skúšku správnosti môžete vyskúšať, či po vynásobení výsledku zľava maticou A (resp. B) dostanete maticu B (resp. A).

2 Izomorfizmy

Úloha 2.1. Zistite, či pre zadané podpriestory $S, T \subseteq \mathbb{R}^4$ platí $S \cong T$, t.j. či sú izomorfné.

a) $S = [(1, 2, 3, 0), (3, 1, 3, 1), (1, 2, 1, 2)]$, $T = [(1, 1, 3, 2), (1, -1, -1, 0), (3, -1, 1, 2)]$

b) $S = [(1, 3, 2, 2), (1, 2, 0, 3), (1, 0, 2, -1)]$, $T = [(1, 1, 1, 0), (1, -3, -1, -2), (1, 2, 2, 1)]$

c) $S = [(1, 1, 0, 3), (1, -1, 2, -1), (1, 2, -1, 5)]$, $T = [(3, 1, 1, 2), (1, 1, -1, 0), (1, 2, -3, -1)]$

Úloha 2.2*. a) Ukážte, že ak V je konečnorozmerný vektorový priestor nad poľom $\mathbb{Q}$, tak V je spočítateľná množina.¹

b) Ukážte, že vektorový priestor $\mathbb{R}$ nad poľom $\mathbb{Q}$ je nekonečnorozmerný.

¹Táto úloha sa dá riešiť, ak už z iných predmetov poznáte základné veci o spočítateľných množinách.

1 Sústavy

Dimenzia priestoru riešení homogénnej sústavy:

$$d(S) = n - h(A)$$

Úloha 1.1. Nájdite všetky riešenia daných sústav rovníc nad poľom $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rrrrr} x_1 & -x_2 & +2x_3 & -3x_4 & = 1 \\ & x_2 & -x_3 & +x_4 & = -3 \\ x_1 & +3x_2 & & -3x_4 & = 1 \\ & -7x_2 & +3x_3 & +x_4 & = 3 \end{array} \quad \begin{array}{rrrrr} x_1 + x_2 & = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = 4 \\ x_2 + x_3 + x_4 & = -3 \\ x_3 + x_4 + x_5 & = 2 \\ x_4 + x_5 & = -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr} 2x & -5y & +3z & +t & = 5 \\ 3x & -7y & +3z & -t & = -1 \\ 5x & -9y & +6z & +2t & = 7 \\ 4x & -6y & +3z & +t & = 8 \end{array} \quad \begin{array}{rrrrr} x & +2y & +4z & -3t & = 0 \\ 3x & +5y & +6z & -4t & = 0 \\ 4x & +5y & -2z & +3t & = 0 \\ 3x & +8y & +24z & -19t & = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr} x & +4y & -2z & +8t & = 12 \\ & y & -7z & +2t & = -4 \\ & & 5z & -t & = 7 \\ & & & z & +3t & = -5 \end{array}$$

Úloha 1.2. Riešte v $\mathbb{Z}_5$ sústavu určenú maticou:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & | & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & | & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & | & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 4 & | & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 & | & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & | & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & | & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 & | & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & | & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & | & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 3 & | & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & | & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & | & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 3 & | & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 2 & | & 1 \end{pmatrix}$$

Úloha 1.3. Riešte v $\mathbb{R}$ sústavu určenú maticou:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & | & 11 \\ 1 & 1 & -3 & | & 7 \\ 11 & -4 & -3 & | & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 2 \\ 3 & -1 & 2 & | & 7 \\ 1 & 0 & -1 & | & -2 \\ 2 & 1 & 1 & | & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & | & 1 \\ -1 & 3 & -2 & | & 3 \\ 0 & 5 & -5 & | & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 4 & 1 & -1 & | & 2 \\ 1 & 2 & 4 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & | & 0 \\ 1 & -3 & -1 & | & 0 \\ 2 & 1 & -4 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Riešenie: a) nemá riešenie, b) $(1, 2, 3)$ c) $(t - \frac{3}{5}, t + \frac{4}{5}, t)$, d) $(\frac{20}{47}, \frac{6}{47}, -\frac{8}{47})$, e) $(\frac{13}{7}t, \frac{2}{7}t, t)$

Úloha 1.4. Riešte v $\mathbb{Z}_7$ sústavu určenú maticou:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & | & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 1 & | & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & | & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & | & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & | & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 & | & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & | & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 1 & | & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & | & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & | & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & | & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 3 & | & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & | & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & | & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Úloha 1.5. Nájdite reálne čísla a, b, c tak, aby graf funkcie $f(x) = ax^2 + bx + c$ prechádzal bodmi $(1, 2)$, $(-1, 6)$ a $(2, 3)$.

Úloha 1.6. Nájdite hodnotu parametra $b \in \mathbb{R}$, pre ktorú má daná sústava riešenie. Pre túto hodnotu aj vyjadrite množinu riešení.

$$\begin{array}{r} x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 3 \\ -x_1 - 5x_2 + 5x_3 - 2x_4 = b \\ 3x_1 + 10x_2 - 5x_3 + 6x_4 = 4 \end{array}$$

Úloha 1.7. Zistite pre aké hodnoty parametra $a \in \mathbb{R}$ systém

$$\begin{array}{r} x + y + 7z = -7 \\ 2x + 3y + 17z = -16 \\ x + 2y + (a^2 + 1)z = 3a \end{array}$$

a) má práve jedno riešenie; b) má nekonečne veľa riešení; c) nemá žiadne riešenie.

Úloha 1.8. V závislosti od parametra $a \in \mathbb{R}$ riešte systém daný maticou:

a) $\begin{pmatrix} a & 1 & | & a^2 \\ 1 & a & | & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} a & 1 & | & a^3 \\ 1 & a & | & 1 \end{pmatrix}$

Úloha 1.9. Ako vyzerajú, v závislosti od parametra p , riešenia sústavy danej maticou:

$$\begin{pmatrix} p & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & p & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & p & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & p & | & 1 \end{pmatrix}$$

2 Súčty podpriestorov

$$d(S) + d(T) = d(S + T) + d(S \cap T)$$

Úloha 2.1. Nájdite nejakú homogénnu sústavu rovníc so 4 neznámymi nad $\mathbb{R}$, ktorej riešením je daný podpriestor:

a) $S = [(1, 4, 0, 1), (1, 0, 3, -3), (0, 2, 0, 1)]$

b) $S = [(1, -1, 1, -2), (1, 1, 0, -1), (3, 1, 1, -4)]$

Úloha 2.2. Zistite $d(U)$, $d(V)$, $d(U + V)$, $d(U \cap V)$, bázu $U + V$ a bázu $U \cap V$

a) v $\mathbb{R}^2$ pre $U = [(2, 5)]$, $V = [(1, 3)]$

b) v $\mathbb{R}^3$ pre $U = [(1, 2, 3), (-1, 2, 3)]$, $V = [(2, 1, 4), (-2, 1, 4)]$

c) v $\mathbb{R}^4$ pre $U = [(1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)]$, $V = [(1, 1, 1, 0), (1, 0, 1, 1)]$

d) v $\mathbb{R}^4$ pre $U = [(1, 2, 3, 4), (1, 1, 1, 1), (4, 3, 2, 1)]$, $V = [(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 0)]$.

[a)1,1,2,0; b)2,2,3,1; c)2,2,4,0; d)2,3,4,1]

Úloha 2.3. Nech $T = [(1, 3, 2), (2, 1, 3), (3, 4, 0)]$ je podpriestor $(\mathbb{Z}_5)^3$. Existuje podpriestor S taký, že $(\mathbb{Z}_5)^3 = T \oplus S$? Ak áno, nájdite ho! Je tento podpriestor jednoznačne určený?

Úloha 2.4. Pre dané podpriestory S , T priestoru V nájdite bázu a dimenziu $S \cap T$. Viete zistiť aj čomu sa rovná dimenzia $S + T$?

a) $S = [(2, 0, 3, 1), (1, -1, 0, 0)]$, $T = [(1, -1, -1, 0), (0, 2, 4, 1)]$ vo $V = \mathbb{R}^4$

b) $S = [(1, 0, 1, -2), (1, 1, -1, 3)]$, $T = [(1, 2, 0, 1), (2, 3, 1, 1), (2, -1, -1, 1)]$ vo $V = \mathbb{R}^4$

c) $S = [(1, 1, 1, 1, 0), (2, 1, 0, 3, -2), (1, 0, 1, 0, 0)]$ a $T = [(1, 1, 0, 0, 3), (1, 0, 1, 1, 1), (0, 1, 1, -1, 0)]$ vo $V = \mathbb{R}^5$

Výsledky: a) $\dim(S) = \dim(T) = 2$, $\dim(S \cap T) = 1$, $\dim(S + T) = 3$; b) $\dim(S) = 2$, $\dim(T) = 3$, $\dim(S \cap T) = 1$, $\dim(S + T) = 4$; c) $\dim(S) = 3$, $\dim(T) = 3$, $\dim(S \cap T) = 1$, $\dim(S + T) = 5$.

Úloha 2.5. Nech $S \neq T$ sú dva podpriestory vektorového priestoru F^3 nad poľom F a $d(S) = 2$, $d(T) = 2$. Dokážte, že $d(S \cap T) \geq 1$.

Úloha 2.6. Ak máme zadané podpriestory

$$W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y - z = 0\},$$

$$W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 3x + y - 2z = 0\},$$

$$W_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - 7y + 3z = 0\},$$

nájdite $\dim(W_1 \cap W_2 \cap W_3)$ a $\dim(W_1 + W_2)$, $\dim(W_1 + W_3)$, $\dim(W_2 + W_3)$.

Úloha 2.7. Ukážte na príklade, že vo všeobecnosti sa $d(S_1 + S_2 + S_3)$ nemusí rovnat¹

$$d(S_1) + d(S_2) + d(S_3) - d(S_1 \cap S_2) - d(S_1 \cap S_3) - d(S_2 \cap S_3) + d(S_1 \cap S_2 \cap S_3).$$

¹Takáto rovnosť by bola analógiou rovnosti pre počet prvkov zjednotenia: $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$.

Jadro a obraz

Ak $f: V \rightarrow W$ je lineárne zobrazenie, tak platí

$$\dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f) = \dim(V),$$

kde

$$\begin{aligned}\text{Ker } f &= \{\vec{x} \in V; f(\vec{x}) = \vec{0}\}, \\ \text{Im } f &= \{f(\vec{x}); \vec{x} \in V\}.\end{aligned}$$

Úloha 1. Nech $f: V \rightarrow W$ je lineárne zobrazenie z vektorového priestoru V do vektorového priestoru W nad poľom F . Dokážte:

Ak S je podpriestor vektorového priestoru V , tak $f[S] = \{f(\vec{\alpha}); \vec{\alpha} \in S\}$ je podpriestor vektorového priestoru W .

Ak T je podpriestor vektorového priestoru W , tak $f^{-1}[T] = \{\vec{\alpha} \in V : f(\vec{\alpha}) \in T\}$ je podpriestor vektorového priestoru V .

Úloha 2. Nech $f: V \rightarrow W$ je lineárne zobrazenie z vektorového priestoru V do vektorového priestoru W nad poľom F . Dokážte, že $\text{Ker } f$ je podpriestor priestoru V a $\text{Im } f$ je podpriestor priestoru W .

Úloha 3. Nech $f: V \rightarrow W$ je lineárne zobrazenie z vektorového priestoru V do vektorového priestoru W nad poľom F . Dokážte, že:

- a) Zobrazenie f je injektívne práve vtedy, keď $\text{Ker } f = \{\vec{0}\}$.
- b) Zobrazenie f je surjektívne práve vtedy, keď $\text{Im } f = W$.

Úloha 4. Nájdite bázu obrazu a bázu jadra lineárneho zobrazenia $f: (\mathbb{Z}_5)^4 \rightarrow (\mathbb{Z}_5)^4$ s danou maticou. V ktorých prípadoch je toto zobrazenie surjektívne a v ktorých injektívne?

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Úloha 5. Nájdite bázu a dimenziu $\text{Ker } f$ aj $\text{Im } f$ pre dané lineárne zobrazenie. Rozhodnite, či toto zobrazenie je injektívne, surjektívne, bijektívne.

- a) $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4, 2x_2 + x_3 + x_4, 4x_2 + 2x_3 + 2x_4)$.
- b) $f: M_{2,2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2,2}(\mathbb{R})$, $f: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a+b & b+c \\ c+d & d+a \end{pmatrix}$
- c) $f: M_{2,2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2,2}(\mathbb{R})$, $f(A) = A - A^T$
- d) $f: V \rightarrow V$, kde $V = \{ax^2 + bx + c; a, b, c \in \mathbb{R}\}$ je podpriestor $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ a $f: p(x) \mapsto p'(x)$. (T.j. f priradí polynómu $p(x)$ jeho deriváciu.)

Úloha 6. Definujme lineárne zobrazenie $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ako $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4, 2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4)$ a označme $U_1 = \text{Ker } f$.

Ďalej definujme lineárne zobrazenie $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ako $g(y_1, y_2) = (y_1 - y_2, y_1 - 3y_2, 2y_1 - 8y_2, 3y_1 - 27y_2)$ a označme $U_2 = \text{Im } g$.

Vidíme, že U_1 aj U_2 sú podpriestory $\mathbb{R}^4$.

Nájdite bázy priestorov U_1 , U_2 , $U_1 \cap U_2$ a $U_1 + U_2$.

Nech $f: V \rightarrow V$ je lineárne zobrazenie. Ako f^2 budeme označovať $f \circ f$. Dokážte

- a) $\text{Ker } f^2 \supseteq \text{Ker } f$,
- b) $\text{Im } f^2 \subseteq \text{Im } f$,
- c) $f^2 = 0 \Leftrightarrow \text{Ker } f \supseteq \text{Im } f$.

Úloha 7. Nech $V_{1,2,3}$ sú vektorové priestory, $f: V_1 \rightarrow V_2$ a $g: V_2 \rightarrow V_3$ sú lineárne zobrazenia.

a) Dokážte, že platí

$$\text{Ker}(f) \subseteq \text{Ker}(g \circ f).$$

b) Ukážte na konkrétnom príklade, že vo všeobecnosti nemusí platiť $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(g \circ f)$.

c) Čo by ste vedeli povedať o prípade, keď g je injektívne?

Úloha 8. Nájdite $\text{Ker } T_A$, $\text{Im } T_A$, kde $T_A: M_{2,2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2,2}(\mathbb{R})$ je dané predpisom

$$T_A(X) = AX - XA$$

pre $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, t.j.,

$$T_A(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} X - X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nech A je ľubovoľná matica typu $n \times n$ nad poľom F . Označme $T_A(X) = AX - XA$.

a) Ukážte, že $T_A: M_{n,n}(F) \rightarrow M_{n,n}(F)$ je lineárne zobrazenie.

b) Je T_A injektívne?

c) Je T_A surjektívne?

Determinanty

Úloha 1. Vypočítajte determinanty: $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$

Ak existuje inverzná matica, aký bude jej determinant. Výsledky (bez záruky): 0, -8, 8.

Úloha 2. Určte determinanty daných matíc. Viete na základe výsledku určiť ich hodnotu pre niektoré hodnoty $c \in \mathbb{R}$?

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & c-1 \\ c-2 & 1 & 0 \\ c & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & c-1 \\ c-2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & c \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & c+1 & 0 \\ 2 & c-1 & 2c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Úloha 3*. $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = ?$

Úloha 4*. $D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a+b & ab \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix} = ?$

Úloha 5*. $D_n = \begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 1 & n \end{vmatrix} = ?$

Úloha 6*. Vypočítajte determinant matice typu $n \times n$

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & \dots & a & x & a \\ a & \dots & a & a & x \end{vmatrix} = ?$$

(Teda ide o maticu, kde diagonálne prvky sú rovné x a všetky prvky mimo diagonály sú rovné a .)

Úloha 7*. $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & n \end{vmatrix} = ?$

Úloha 8*. Nájdite determinant matice A_n typu $n \times n$, ktorej prvky sú určené predpisom $a_{ij} = \min\{i, j\}$, t.j. napríklad

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Úloha 9. Nech A je matica typu 7×7 , ktorej prvky sú nepárne celé čísla. Ukážte, že $|A|$ je celé číslo a ďalej, že $|A|$ je celočíselný násobok čísla 64.

Úloha 10. Ak A , B sú štvorcové matice a matica AB je regulárna, tak obe matice A , B sú regulárne. (Môžete sa zamyslieť nad tým, či to viete zdôvodniť s pomocou determinantov a aj nad riešením bez nich. Takisto sa môžete skúsiť zamyslieť nad tým, čo sa stane ak matice nie sú štvorcové.)

Úloha 11*. Majme regulárnu maticu A a sústavu tvaru $A\vec{x}^T = \vec{b}^T$. Označme ako A_i maticu, ktorá vznikne ak v matici A nahradíme i -ty stĺpec pravými stranami.

- a) Vedeli by ste vymyslieť vhodnú maticu tak aby platilo $A \cdot B_i = A_i$?
 b) Ak ste našli takú maticu, vedeli by ste pomocou nej odvodiť Cramerovo pravidlo?

Úloha 12. Ak viete, že 195, 403 a 247 sú násobky čísla 13, viete ukázať (bez toho, aby ste ho museli vyrátať), že aj $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix}$ je celočíselný násobok 13?

Úloha 13. Nech A je matica 4×4 , ktorá obsahuje iba čísla ± 1 . Ukážte, že $|A|$ je celočíselný násobok 8.

Úloha 14. Vypočítajte determinant

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}.$$

Úloha 15. Ukážte, že ak $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, tak

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0$$

Úloha 16. Ukážte, že

$$\begin{vmatrix} x^2 & (x+1)^2 & (x+2)^2 \\ (x+1)^2 & (x+2)^2 & (x+3)^2 \\ (x+2)^2 & (x+3)^2 & (x+4)^2 \end{vmatrix} = -8$$

pre ľubovoľné $x \in \mathbb{R}$.

Úloha 17. Vypočítajte determinant matice $\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}$. Použite súčin

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$$

na odvodenie identity $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$. (Fibonacciho identita)