

Domáca úloha č. 1

Zverejnená 30.9.2025 - odovzdáva sa najneskôr na cvičeniach v treťom týždni semestra (9.10., 10.10. – podľa toho, do ktorej skupiny patríte).

Spôsob odovzdávania úloh je taký, na akom ste sa dohodli s cvičiacim vašej skupiny.

Vo všetkých úlohách $\mathbb{N}$ označuje množinu prirodzených čísel, t.j. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Označenie $id_{\mathbb{N}}$ znamená identické zobrazenie na množine $\mathbb{N}$, t.j. zobrazenie $id_{\mathbb{N}}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ určené predpisom $id_{\mathbb{N}}(n) = n$ (pre každé $n \in \mathbb{N}$). Treba dodržať, že ide naozaj o zobrazenia $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

Súčasťou riešenia je aj overenie toho, že navrhnuté zobrazenia skutočne spĺňajú podmienky zo zadania. (Nestačí len napísať predpisy zobrazení.) A v prípade, že také zobrazenia neexistujú, treba uviesť zdôvodnenie (dôkaz) prečo to tak je.

1. Nájdite príklad zobrazení $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ takých, že $f \circ g = id_{\mathbb{N}}$ a súčasne $g \circ f \neq id_{\mathbb{N}}$, (alebo zdôvodnite, že také zobrazenia neexistujú).

2. Nájdite príklad zobrazenia $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ takého, že $f \circ f = id_{\mathbb{N}}$ a súčasne $f \neq id_{\mathbb{N}}$ (alebo zdôvodnite, že také zobrazenie neexistuje).

3. Nájdite príklad zobrazení $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ takých, že zložené zobrazenie $g \circ f$ je injekcia ale g nie je injekcia, (alebo zdôvodnite, že také zobrazenia neexistujú).

4. Nájdite príklad zobrazení $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ takých, že zložené zobrazenie $g \circ f$ je surjekcia ale f nie je surjekcia, (alebo zdôvodnite, že také zobrazenia neexistujú).

Rozdelenie – podľa priezviska: 1 riešia A–D, 2 riešia E–K, 3 riešia L–R, 4 riešia S–Z

Domáca úloha č. 2

Zverejnená 9.10.2025 - odovzdáva sa najneskôr na cvičeniach v štvrtom týždni semestra (16.10., 17.10. – podľa toho, do ktorej skupiny patríte).

Spôsob odovzdávania úloh je taký, na akom ste sa dohodli s cvičiacim vašej skupiny.

1. Zistite, či uvedené tvrdenie platí – ak áno, dokážte ho; ak nie, nájdite kontrapríklad.

Nech $(G, *)$ je grupa a $x \in G$. Ak platí $x * x = x$, tak $x = e$; t.j. x je neutrálny prvok.

2. Zistite, či uvedené tvrdenie platí – ak áno, dokážte ho; ak nie, nájdite kontrapríklad.

Nech $(G, *)$ je grupa a $x \in G$. Ak platí $x = x^{-1}$, tak $x = e$; t.j. x je neutrálny prvok.

3. Zistite, či uvedené tvrdenie platí – ak áno, dokážte ho; ak nie, nájdite kontrapríklad.

Nech $(G, *)$ je grupa a $x \in G$. Ak platí $x * x = e$, tak $x = e$; t.j. x je neutrálny prvok.

4. Zistite, či uvedené tvrdenie platí – ak áno, dokážte ho; ak nie, nájdite kontrapríklad.

Nech $(G, *)$ je grupa a $x, y \in G$. Ak platí $x * x = y * y$, tak $x = y$.

Rozdelenie – podľa priezviska: 1 riešia A–D, 2 riešia E–K, 3 riešia L–R, 4 riešia S–Z

Domáca úloha č. 3

Zverejnená 16.10.2025 - odovzdáva sa najneskôr na cvičeniach v piatom týždni semestra (23.10., 24.10. – podľa toho, do ktorej skupiny patríte).

Spôsob odovzdávania úloh je taký, na akom ste sa dohodli s cvičiacim vašej skupiny.

1. Overte, či množina $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ s operáciami

$$\begin{aligned}(a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d) \\ (a, b) \cdot (c, d) &= (bd - ac, ad + bc)\end{aligned}$$

je pole.

2. Overte, či množina $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ s operáciami

$$\begin{aligned}(a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d) \\ (a, b) \cdot (c, d) &= (bd - ac, ad + bc)\end{aligned}$$

je pole.

3. Overte, či množina $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ s operáciami

$$\begin{aligned}(a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d) \\ (a, b) \cdot (c, d) &= (ac, bd)\end{aligned}$$

je pole.

4. Overte, či množina $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ s operáciami

$$\begin{aligned}(a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d) \\ (a, b) \cdot (c, d) &= (ac, bd)\end{aligned}$$

je pole.

Rozdelenie – podľa priezviska: 1 riešia A–D, 2 riešia E–K, 3 riešia L–R, 4 riešia S–Z

Domáca úloha č. 4

Zverejnená 22.10.2025 - odovzdáva sa najneskôr na cvičeniach v siedmom týždni semestra (6.11., 7.11. – podľa toho, do ktorej skupiny patríte).

Spôsob odovzdávania úloh je taký, na akom ste sa dohodli s cvičiacim vašej skupiny.

Čas na odovzdávanie som nechal teraz **dva týždne** – v piatok 31.10. výuka odpadne (rektorské voľno); aj pre štvrtkovú skupinu som chcel nechať rovnako dlhý čas na odovzdávanie.

Vo všetkých 4 skupinách je zadanie rovnaké: Pre dané podmnožiny S , T priestoru $V = \mathbb{R}^4$ (nad poľom $\mathbb{R}$) rozhodnite, či ide o vektorové podpriestory. (Svoje tvrdenie aj zdôvodnite.)

1. $S = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4; |a| = |b| = |c| = |d|\}$ a $T = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, a = b = c = d\}$.

2. $S = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4; a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0\}$ a $T = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, a + b + c + d = 0\}$.

3. $S = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4; |a| - |b| + |c| - |d| = 0\}$ a $T = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, a - b + c - d = 0\}$.

4. $S = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4; a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 0\}$ a $T = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, a + b - c - d = 0\}$.

Rozdelenie – podľa priezviska: 1 riešia A–D, 2 riešia E–K, 3 riešia L–R, 4 riešia S–Z

Domáca úloha č. 5

Zverejnená 6.11.2025 - odovzdáva sa najneskôr na cvičeniach v siedmom týždni semestra (13.11., 14.11. – podľa toho, do ktorej skupiny patríte).

Vo všetkých 4 skupinách je zadanie rovnaké: Pre dané vektory z priestoru $(\mathbb{Z}_7)^4$ rozhodnite, či sú lineárne závislé alebo lineárne nezávislé.

Treba si dať pozor na to aby ste **naozaj počítali v poli** $\mathbb{Z}_7$, nie je to rovnaké ako počítat s reálnymi číslami.

Teda vo Vašom riešení by sa vlastne mali vyskytovať iba čísla zo $\mathbb{Z}_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

(Prinajmenšom v konečnom výsledku, v rôznych krokoch riešenia sa samozrejme môžu vyskytnúť veci ako 3^{-1} alebo -5 , ktoré majú zmysel aj v $\mathbb{Z}_7$.) Ak sa vám zdá, že niekde potrebujete $\frac{3}{4}$, treba si uvedomiť, že $4^{-1} = 2$, lebo v $\mathbb{Z}_7$ platí $4 \odot 2 = 1$. Teda číslu $\frac{3}{4}$ tu zodpovedá $3 \odot 4^{-1} = 3 \odot 2 = 6$. Takisto pri odčítovaní si treba uvedomiť, že $-1 = 6$, $-2 = 5$, atď.

Riešenia, ktoré budú počítat nad iným polom budú automaticky považované za nesprávne.

A takisto zdôrazním, že by ste mali používať iba veci, ktoré **boli prebraté doteraz**. Zanedlho uvidíme, že takýto typ úlohy sa dá riešiť pomocou riadkových úprav matice, ktorá obsahuje zadané vektory ako riadky – to sme ešte neprebekali, pri riešení tejto úlohy chcem, aby ste to neriešili takýmto spôsobom. (Inak povedané, mali by ste otázku o lineárnej závislosti previesť na sústavu rovníc a potom na základe riešenia tejto sústavy nejako zistiť, či vektory sú lineárne závislé. Takéto príklady sme robili aj na cvikách, takže viete, že vlastne nie je nutné nájsť všetky riešenia sústavy. Niektorí z vás možno zo strednej školy poznajú aj maticový zápis pre sústavy rovníc – ak ho poznáte a viete ho používať, tak samozrejme môžete.)

1. $(1, 4, 3, 1), (2, 3, 1, 2), (1, 1, 2, 3), (1, 6, 4, 0)$

2. $(1, 4, 3, 1), (2, 3, 1, 2), (1, 1, 2, 3), (1, 1, 1, 2)$

3. $(1, 4, 3, 1), (3, 4, 2, 4), (1, 1, 2, 3), (2, 0, 5, 2)$

4. $(3, 0, 4, 3), (2, 3, 1, 2), (2, 2, 3, 5), (1, 1, 1, 2)$

Rozdelenie – podľa priezviska: 1 riešia A–D, 2 riešia E–K, 3 riešia L–R, 4 riešia S–Z

Domáca úloha č. 6

Zverejnená 13.11.2025 - odovzdáva sa najneskôr na cvičeniach v ďalšom týždni (20.11., 21.11. – podľa toho, do ktorej skupiny patríte).

Zistite, či platí zadané tvrdenie. Ak platí, tak ho dokažte. Ak neplatí, tak nájdite kontrapríklad.

Zdôrazním, že ak povieť, že tvrdenie platí, tak riešenie by malo byť také, že naozaj toto tvrdenie zdôvodníte pre **ľubovoľné** vektory a **ľubovoľný** vektorový priestor (v niektorých skupinách nad akýmkoľvek poľom, v niektorých skupinách nad $\mathbb{R}$.) Teda na zdôvodnenie, že tvrdenie je pravdivé, určite nestačí len si zvoliť nejaké konkrétne vektory $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$.

Ak odpoveď je, že tvrdenie neplatí, tak na vyvrátenie samozrejme stačí vybrať jeden konkrétny príklad – nájsť vektory, pre ktoré také tvrdenie nefunguje. (Ale aj v takom prípade jasne do riešenia napíšte, aký priestor V ste zvolili. A aj nad akým poľom F pracujete – toto sa samozrejme týka iba tých skupín, kde nie je priamo v zadaní určené, že ide o vektorový priestor nad poľom $\mathbb{R}$.)

1. Nech $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in V$, kde V je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$. Potom $d([\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}]) = d([\vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{\alpha} + \vec{\gamma}, \vec{\beta} + \vec{\gamma}])$.

2. Nech $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in V$, kde V je vektorový priestor nad poľom F . Potom $d([\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}]) = d([\vec{\alpha}, \vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}])$. (Zdôrazním, že tu sa pýtam či takéto tvrdenie platí pre *ľubovoľné* pole F .)

3. Nech $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in V$, kde V je vektorový priestor nad poľom F . Potom $d([\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}]) = d([\vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{\alpha} + \vec{\gamma}, \vec{\beta} + \vec{\gamma}])$. (Zdôrazním, že tu sa pýtam či takéto tvrdenie platí pre *ľubovoľné* pole F .)

4. Nech $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in V$, kde V je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$. Potom $d([\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}]) = d([\vec{\alpha}, \vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}])$.

Rozdelenie – podľa priezviska: 1 riešia A–D, 2 riešia E–K, 3 riešia L–R, 4 riešia S–Z

Domáca úloha č. 7

Zverejnená 19.11.2025 - odovzdáva sa najneskôr na cvičeniach v ďalšom týždni (27.11., 28.11. – podľa toho, do ktorej skupiny patríte).

Zadanie je vo všetkých skupinách rovnaké: Sú zadane 4 matice nad poľom $\mathbb{Z}_7$. Vašou úlohou je rozhodnúť, ktoré z nich sú riadkovo ekvivalentné.

Vo všetkých 4 skupinách je zadanie rovnaké: Pre dané vektory z priestoru $(\mathbb{Z}_7)^4$ rozhodnite, či sú lineárne závislé alebo lineárne nezávislé.

Treba si dať pozor na to aby ste **naozaj počítali v poli** $\mathbb{Z}_7$, nie je to rovnaké ako počítať s reálnymi číslami.

Teda vo Vašom riešení by sa vlastne mali vyskytovať iba čísla zo $\mathbb{Z}_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

(Prinajmenšom v konečnom výsledku, v rôznych krokoch riešenia sa samozrejme môžu vyskytnúť veci ako 3^{-1} alebo -5 , ktoré majú zmysel aj v $\mathbb{Z}_7$.) Ak sa vám zdá, že niekde potrebujete $\frac{3}{4}$, treba si uvedomiť, že $4^{-1} = 2$, lebo v $\mathbb{Z}_7$ platí $4 \odot 2 = 1$. Teda číslu $\frac{3}{4}$ tu zodpovedá $3 \odot 4^{-1} = 3 \odot 2 = 6$. Takisto pri odčítaní si treba uvedomiť, že $-1 = 6$, $-2 = 5$, atď.

Riešenia, ktoré budú počítať nad iným poľom budú automaticky považované za nesprávne.

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$2. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$3. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$4. \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Rozdelenie – podľa priezviska: 1 riešia A–D, 2 riešia E–K, 3 riešia L–R, 4 riešia S–Z

Domáca úloha č. 8

Zverejnená 26.11.2025 - odovzdáva sa najneskôr na cvičeniach v ďalšom týždni (4.12., 5.12. – podľa toho, do ktorej skupiny patríte).

Zadanie vo všetkých skupinách: Vypočítajte hodnotu parametra v závislosti od parametra $c \in \mathbb{R}$.

Explicitne napíšem, že je povolené používať tieto veci:

- Na cvičeniach sme spomenuli, že $h(A) = h(A^T)$. (Z toho tiež vyplýva, že pri výpočte hodnoty môžeme kombinovať riadkové a stĺpcové úpravy.) Tento fakt sme ešte na prednáške nedokázali – pri riešení ho môžete pokojne používať.
- Na výpočet tohto typu úloh sa dajú používať aj determinanty. Tie dovedy prebrať nestihneme; ale ak determinanty viete rátať (alebo sa to naučíte aspoň pre matice 3×3 z poznámok), tak ich tiež môžete použiť. Ak použijete determinanty, napíšte jasné zdôvodnenie toho, čo ste pomocou nich zistili a prečo platí to, čo tvrdíte o hodnoty.

1. $\begin{pmatrix} c & c+1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & c & 1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} c & c+1 & -1 \\ -c & -c & 1 \\ 1 & c & -1 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} c & c+1 & -1 \\ -c & 1 & c \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & c+1 & c+2 \\ -c & c+1 & 1 \\ c & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Rozdelenie – podľa priezviska: 1 riešia A–D, 2 riešia E–K, 3 riešia L–R, 4 riešia S–Z

Domáca úloha č. 9

Zverejnená 4.12.2025 - odovzdáva sa najneskôr na cvičeniach v ďalšom týždni (11.12., 12.12. – podľa toho, do ktorej skupiny patríte).

Zadanie vo všetkých skupinách: Nájdite aspoň jedno lineárne zobrazenie $f: \mathbb{Z}_7^4 \rightarrow \mathbb{Z}_7^3$ spĺňajúce uvedené podmienky, ak také zobrazenie existuje. Napíšte maticu zobrazenia f . (Ak také zobrazenie neexistuje, zdôvodnite prečo je to tak.)

1. $f(1, 4, 3, 1) = (1, 2, 6)$, $f(3, 2, 1, 1) = (0, 5, 5)$, $f(1, 0, 3, 3) = (1, 2, 2)$, $f(1, 1, 1, 1) = (2, 0, 4)$.

2. $f(1, 4, 3, 1) = (1, 2, 6)$, $f(3, 2, 1, 1) = (0, 5, 5)$, $f(1, 0, 3, 3) = (1, 2, 2)$, $f(1, 1, 1, 6) = (2, 0, 4)$.

3. $f(1, 4, 3, 1) = (1, 2, 6)$, $f(4, 6, 4, 2) = (1, 0, 4)$, $f(3, 3, 5, 4) = (5, 2, 4)$, $f(1, 1, 1, 6) = (2, 1, 4)$.

4. $f(1, 4, 3, 1) = (1, 2, 6)$, $f(4, 6, 4, 2) = (1, 0, 4)$, $f(3, 3, 5, 4) = (5, 2, 4)$, $f(1, 1, 1, 6) = (2, 0, 4)$.

Rozdelenie – podľa priezviska: 1 riešia A–D, 2 riešia E–K, 3 riešia L–R, 4 riešia S–Z

Domáca úloha č. 10

Zverejnená 11.12.2025 - odovzdáva sa najneskôr na cvičeniach v ďalšom týždni (18.12., 19.12. – podľa toho, do ktorej skupiny patríte).

V každej skupine je úlohou vyriešiť sústavu určenú zadanou maticou nad poľom $\mathbb{R}$ a aj **zapísať množinu riešení**.

1.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 & -6 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

2.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

3.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & -5 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

4.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & 5 \end{array} \right)$$

Rozdelenie – podľa priezviska: 1 riešia A–D, 2 riešia E–K, 3 riešia L–R, 4 riešia S–Z