

Skalárny súčin

26. februára 2024

Stredná škola

$$\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$$\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \cos \varphi,$$

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{\langle \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle}.$$

Definícia skalárneho súčinu

Definícia

Nech $(V, +, \cdot)$ je vektorový priestor nad poľom $\mathbb{R}$. Potom zobrazenie $g: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ sa nazýva *skalárny súčin* na V , ak pre ľubovoľné $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$ a $c \in \mathbb{R}$ platí

- (i) $g(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = g(\vec{\beta}, \vec{\alpha})$,
- (ii) $g(\vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{\gamma}) = g(\vec{\alpha}, \vec{\gamma}) + g(\vec{\beta}, \vec{\gamma})$,
- (iii) $g(c\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = cg(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$,
- (iv) ak $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, tak $g(\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) > 0$.

Vektorový priestor V spolu so skalárnym súčinom g nazývame *euklidovským vektorovým priestorom*.

Definícia skalárneho súčinu

- (i) $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = \langle \vec{\beta}, \vec{\alpha} \rangle,$
- (ii) $\langle \vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{\gamma} \rangle = \langle \vec{\alpha}, \vec{\gamma} \rangle + \langle \vec{\beta}, \vec{\gamma} \rangle,$
- (iii) $\langle c\vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = c\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle,$
- (iv) ak $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, tak $\langle \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle > 0$.

Ekvivalentná formulácia (iv): Pre každý vektor platí $\langle \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle \geq 0$ a rovnosť nastane práve vtedy, keď $\vec{\alpha} = \vec{0}$.

T.j. skalárny súčin je zobrazenie $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, ktoré je symetrické, bilinéárne a kladne definitné.

Nad $\mathbb{C}$: $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = \overline{\langle \vec{\beta}, \vec{\alpha} \rangle}$

Príklady skalárnych súčinov

$$V = \mathbb{R}^n$$

$$\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = \sum_{k=1}^n a_k b_k$$

štandardný skalárny súčin v $\mathbb{R}^n$

Príklady skalárnych súčinov

- ▶ $V = \mathbb{R}^2$ a $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + 2a_2 b_2$
- ▶ $V = \mathbb{R}^n$ a

$$\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = (a_1 \dots a_n) C \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \vec{\alpha} C \vec{\beta}^T,$$

pre niektoré matice C .

- ▶ $V = C(a, b)$ a

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

(Takýto skalárny súčin súvisí s Fourierovými radmi.)

Veľkosť vektora

Definícia

Nech V je euklidovský vektorový priestor. Potom pre $\vec{a} \in V$ definujeme veľkosť vektora $\vec{a}$ ako

$$|\vec{a}| = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}.$$

Alternatívne označenie: $\|\vec{a}\|$

Veľkosť vektora

Tvrdenie

Nech V je euklidovský vektorový priestor. Pre ľubovoľné $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$ a $c \in \mathbb{R}$ platí:

- (i) $|\vec{\alpha}| \geq 0$
- (ii) $|\vec{\alpha}| = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \vec{0}$
- (iii) $|c\vec{\alpha}| = |c||\vec{\alpha}|$
- (iv) $|\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle| \leq |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$ (Schwarzova nerovnosť)
- (v) $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$ (trojuholníková nerovnosť)

V (iv) nastáva rovnosť práve vtedy, keď vektor $\vec{\alpha}$ je násobkom vektora $\vec{\beta}$.

V (v) nastane rovnosť, ak $\vec{\alpha}$ je nezáporným násobkom $\vec{\beta}$.

Schwarzova nerovnosť

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2 \sum_{k=1}^n y_k^2} \quad (1)$$

Dôkaz Schwarzovej nerovnosti

$$\begin{aligned} |\vec{\alpha} + c\vec{\beta}|^2 &= \langle \vec{\alpha} + c\vec{\beta}, \vec{\alpha} + c\vec{\beta} \rangle \\ &= \langle \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle + 2c\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle + c^2\langle \vec{\beta}, \vec{\beta} \rangle \\ &= |\vec{\alpha}|^2 + 2c\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle + c^2|\vec{\beta}|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Dôkaz Schwarzovej nerovnosti

$$|\vec{\alpha}|^2 + 2c\langle\vec{\alpha}, \vec{\beta}\rangle + c^2|\vec{\beta}|^2 \geq 0$$

$$D = 4\langle\vec{\alpha}, \vec{\beta}\rangle^2 - 4|\vec{\alpha}|^2|\vec{\beta}|^2 \leq 0$$

$$\langle\vec{\alpha}, \vec{\beta}\rangle^2 \leq |\vec{\alpha}|^2|\vec{\beta}|^2$$

$$|\langle\vec{\alpha}, \vec{\beta}\rangle| \leq |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$$

Dôkaz trojuholníkovej nerovnosti

$$\begin{aligned} |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 &= \langle \vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{\alpha} + \vec{\beta} \rangle = \langle \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle + 2\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle + \langle \vec{\beta}, \vec{\beta} \rangle = \\ &|\vec{\alpha}|^2 + 2\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle + |\vec{\beta}|^2 \stackrel{(1)}{\leq} |\vec{\alpha}|^2 + 2|\vec{\alpha}||\vec{\beta}| + |\vec{\beta}|^2 = (|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|)^2 \end{aligned}$$

Uhol vektorov

Definícia

Nech V je euklidovský vektorový priestor.

Uhol dvoch nenulových vektorov definujeme ako taký uhol, pre ktorý platí

$$\cos \varphi = \frac{\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle}{|\vec{\alpha}| |\vec{\beta}|}.$$

V prípade, že niektorý z vektorov je nulový, položíme $\varphi = 0$.

Kolmé vektory

Definícia

Vektory $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$ nazveme *kolmé (ortogonálne)*, ak $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = 0$.

O k -tici vektorov $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_k$ hovoríme, že tieto vektory sú ortogonálne, ak ľubovoľné 2 z nich sú ortogonálne, t.j. $\langle \vec{\alpha}_i, \vec{\alpha}_j \rangle = 0$ pre každé $i \neq j$.

Tvrdenie

Nech V je euklidovský vektorový priestor. Ak nenulové vektory $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_k$ sú ortogonálne, tak sú lineárne nezávislé.

Ortogonalný doplnok

Definícia

Nech V je euklidovský priestor a $M \subseteq V$. Potom

$$M^\perp = \{\vec{\alpha} \in V; \langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = 0 \text{ pre všetky } \vec{\beta} \in M\}$$

sa nazýva *ortogonalný doplnok* množiny M .

Tvrdenie

Nech V je euklidovský priestor a $M \subseteq V$. Potom $M^\perp$ je vektorový podpriestor priestoru V .

Ortogonalný doplnok

Tvrdenie

Ak V je euklidovský priestor a $M \subseteq N \subseteq V$, tak

$$N^{\perp} \subseteq M^{\perp}.$$

Ortogonalný doplnok

Lema

Nech V je euklidovský priestor a $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_k \in V$. Nech $S = [\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_k]$ je podpriestor vygenerovaný týmito vektormi. Potom $S^\perp = \{\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_k\}^\perp$.

Ortogonalný doplnok

Tvrdenie

Ak V je euklidovský priestor a S, T sú podpriestory V , tak

$$(S + T)^\perp = S^\perp \cap T^\perp.$$