

Podobnosť matíc

18. marca 2024

Súradnice vektora

Definícia

Ak $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ je báza vektorového priestoru V nad poľom F a $\vec{\gamma} \in V$, tak n -ticu $(c_1, \dots, c_n) \in F^n$ takú, že platí

$$\vec{\gamma} = c_1 \vec{\alpha}_1 + \dots + c_n \vec{\alpha}_n$$

nazývame *súradnicami vektora $\vec{\gamma}$ v báze $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$* .

Matica prechodu

Definícia

Nech $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ a $\vec{\alpha}'_1, \dots, \vec{\alpha}'_n$ sú dve bázy vektorového priestoru V nad poľom F . Nech $p_{ij} \in F$ sú také, že platí

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}'_1 &= p_{11}\vec{\alpha}_1 + p_{12}\vec{\alpha}_2 + \dots + p_{1n}\vec{\alpha}_n \\ \vec{\alpha}'_2 &= p_{21}\vec{\alpha}_1 + p_{22}\vec{\alpha}_2 + \dots + p_{2n}\vec{\alpha}_n \\ &\vdots \\ \vec{\alpha}'_n &= p_{n1}\vec{\alpha}_1 + p_{n2}\vec{\alpha}_2 + \dots + p_{nn}\vec{\alpha}_n\end{aligned}\tag{1}$$

Potom maticu $P = \|p_{ij}\|$ nazývame *matica prechodu* od bázy $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ k báze $\vec{\alpha}'_1, \dots, \vec{\alpha}'_n$.

i -ty riadok = súradnice vektoru $\vec{\alpha}'_i$ v báze $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$.

Prechod opačným smerom

Veta

Ak P je matica prechodu od bázy $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ k báze $\vec{\alpha}'_1, \dots, \vec{\alpha}'_n$, tak matica P je regulárna a matica P^{-1} je matica prechodu opačným smerom, teda od $\vec{\alpha}'_1, \dots, \vec{\alpha}'_n$ k $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$.

Prechod opačným smerom

$$\begin{aligned}
 \vec{\alpha}_i &= p'_{i1} \vec{\alpha}'_1 + p'_{i2} \vec{\alpha}'_2 + \cdots + p'_{in} \vec{\alpha}'_n = \\
 &= p'_{i1} (p_{11} \vec{\alpha}_1 + p_{12} \vec{\alpha}_2 + \cdots + p_{1n} \vec{\alpha}_n) + \\
 &+ p'_{i2} (p_{21} \vec{\alpha}_1 + p_{22} \vec{\alpha}_2 + \cdots + p_{2n} \vec{\alpha}_n) + \\
 &\vdots \\
 &+ p'_{in} (p_{n1} \vec{\alpha}_1 + p_{n2} \vec{\alpha}_2 + \cdots + p_{nn} \vec{\alpha}_n)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{\alpha}_i &= (p'_{i1} p_{11} + p'_{i2} p_{21} + \cdots + p'_{in} p_{n1}) \vec{\alpha}_1 + \\
 &+ (p'_{i1} p_{12} + p'_{i2} p_{22} + \cdots + p'_{in} p_{n2}) \vec{\alpha}_2 + \\
 &\vdots \\
 &+ (p'_{i1} p_{1n} + p'_{i2} p_{2n} + \cdots + p'_{in} p_{nn}) \vec{\alpha}_n
 \end{aligned}$$

Prechod opačným smerom

$$\vec{\alpha}_i = \sum_{j=1}^n p'_{ij} \vec{\alpha}'_j = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n p'_{ij} p_{jk} \vec{\alpha}_k = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n p'_{ij} p_{jk} \right) \vec{\alpha}_k.$$

$$\sum_{j=1}^n p'_{ij} p_{jk} = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{ak } i = k \\ 0, & \text{inak.} \end{cases}$$

Zápis pomocou matíc

$$\vec{\gamma} = \vec{x} \begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \vec{\alpha}_n \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \vec{\alpha}'_1 \\ \vdots \\ \vec{\alpha}'_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \vec{\alpha}_n \end{pmatrix}. \quad (2)$$

- ▶ Funguje pre $V = F^n$.
- ▶ Ak $\dim(V) = n$, tak $V \cong F^n$.
- ▶ Treba si rozmyslieť, že izomorfizmus „nič nepokazí“.

Prechod opačným smerom

$$\begin{pmatrix} \vec{\alpha}'_1 \\ \vdots \\ \vec{\alpha}'_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \vec{\alpha}_n \end{pmatrix}$$
$$P^{-1} \begin{pmatrix} \vec{\alpha}'_1 \\ \vdots \\ \vec{\alpha}'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \vec{\alpha}_n \end{pmatrix}$$

Báza z matice prechodu

Tvrdenie

Nech $P = \|p_{ij}\|$ je regulárna matica typu $n \times n$ a $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ je báza vektorového priestoru V . Potom aj vektory $\vec{\alpha}'_1, \dots, \vec{\alpha}'_n$ určené vzťahmi

$$\vec{\alpha}'_1 = p_{11}\vec{\alpha}_1 + p_{12}\vec{\alpha}_2 + \dots + p_{1n}\vec{\alpha}_n$$

$$\vec{\alpha}'_2 = p_{21}\vec{\alpha}_1 + p_{22}\vec{\alpha}_2 + \dots + p_{2n}\vec{\alpha}_n$$

$$\vdots$$

$$\vec{\alpha}'_n = p_{n1}\vec{\alpha}_1 + p_{n2}\vec{\alpha}_2 + \dots + p_{nn}\vec{\alpha}_n$$

tvoria bázu priestoru V .

Zmena bázy

Veta

Nech $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ a $\vec{\alpha}'_1, \dots, \vec{\alpha}'_n$ sú bázy vektorového priestoru V .

Nech P je matica prechodu od bázy $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ k báze $\vec{\alpha}'_1, \dots, \vec{\alpha}'_n$.

Nech $\vec{\gamma} \in V$ a $(x_1, \dots, x_n)$ sú súradnice vektora $\vec{\gamma}$ v báze

$\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$, $(x'_1, \dots, x'_n)$ sú jeho súradnice v báze $\vec{\alpha}'_1, \dots, \vec{\alpha}'_n$.

Potom platí

$$(x_1, \dots, x_n) = (x'_1, \dots, x'_n)P.$$

Matica zobrazenia v danej báze

Definícia

Nech V je vektorový priestor a $f: V \rightarrow V$ je lineárne zobrazenie.

Nech $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ je báza V . *Matica zobrazenia f vzhľadom na bázu $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ je matica $A = \|a_{ij}\|$ taká, že platí*

$$f(\vec{\alpha}_i) = a_{i1}\vec{\alpha}_1 + \dots + a_{in}\vec{\alpha}_n.$$

i -ty riadok = súradnice obrazu i -teho báзовého vektora v tejto báze

Matica zobrazenia v danej báze

Tvrdenie

Nech V je vektorový priestor, $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ je báza V a $f: V \rightarrow V$ je lineárne zobrazenie. Ak A je matica zobrazenia f pri báze $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ a vektor $\vec{\gamma}$ má v tejto báze súradnice $(x_1, \dots, x_n)$, tak jeho obraz $f(\vec{\gamma})$ má v tej istej báze súradnice

$$(x_1, \dots, x_n)A.$$

Zmena bázy

Veta

Nech V je vektorové priestory, $f: V \rightarrow V$ je lineárne zobrazenie a $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n, \vec{\alpha}'_1, \dots, \vec{\alpha}'_n$ sú bázy priestoru V . Ak P je matica prechodu od $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ k $\vec{\alpha}'_1, \dots, \vec{\alpha}'_n$, A je matica zobrazenia f pri báze $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ a B je matica tohoto zobrazenia pri báze $\vec{\alpha}'_1, \dots, \vec{\alpha}'_n$, tak platí

$$B = PAP^{-1}. \quad (3)$$

Zmena bázy

Definícia

Nech A, B sú štvorcové matice nad poľom F . Ak existuje matica P taká, že $B = PAP^{-1}$, hovoríme, že matice A a B sú *podobné*.

Podobnosť matíc je relácia ekvivalencie.