

Podobnosť s diagonálnou maticou

18. marca 2024

Podobnosť s diagonálnou maticou

$$PAP^{-1} = D$$

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix} = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$$

Mocnina matice

$$A^{100} = P^{-1} \operatorname{diag}(d_1^{100}, d_2^{100}, \dots, d_n^{100}) P$$

$$e^A = P^{-1} \left(I + D + \frac{D^2}{2!} + \frac{D^3}{3!} + \dots \right) P = P^{-1} \cdot \operatorname{diag}(e^{d_1}, \dots, e^{d_n}) \cdot P$$

$$e^{At} = P^{-1} \cdot \operatorname{diag}(e^{d_1 t}, \dots, e^{d_n t}) \cdot P$$

$$f'(t) = Af(t)$$

$$(e^{At})' = P(e^{Dt})'P^{-1} = PDe^{Dt}P^{-1} = PDP^{-1}Pe^{Dt}P^{-1} = Ae^{At}$$

Podobnosť s diagonálnou maticou

$$PAP^{-1} = D$$

$$PA = DP$$

$$\begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \vec{\alpha}_n \end{pmatrix} A = D \begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \vec{\alpha}_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1 A \\ \vdots \\ \vec{\alpha}_n A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \vec{\alpha}_1 \\ \vdots \\ d_n \vec{\alpha}_n \end{pmatrix}$$

$$\vec{\alpha}_i A = d_i \vec{\alpha}_i.$$

Vlastné čísla

Definícia

Nech A je štvorcová matica nad poľom F . Prvok $c \in F$ nazveme *vlastným číslom* matice A , ak existuje nenulový vektor $\vec{\alpha} \in F^n$ taký, že $\vec{\alpha}A = c\vec{\alpha}$.

Nenulový vektor $\vec{\alpha} \in F^n$ nazývame *vlastným vektorom* matice A , ak existuje $c \in F$ (c môže byť aj 0) také, že $\vec{\alpha}A = c\vec{\alpha}$.

Vlastné čísla

Definícia

Ak $\vec{\alpha}$ je nenulový vektor a pre $c \in F$ platí $\vec{\alpha}A = c\vec{\alpha}$, hovoríme, aj, že (vlastný) vektor $\vec{\alpha}$ prislúcha ku vlastnému číslu c , alebo že (vlastné) číslo c prislúcha ku vlastnému vektoru $\vec{\alpha}$.

Vlastné čísla

1. c je vlastné číslo matice A
2. Existuje nenulový vektor $\vec{\alpha}$ taký, že $\vec{\alpha}A = c\vec{\alpha}$
3. Existuje nenulový vektor $\vec{\alpha}$ taký, že $\vec{\alpha}A = \vec{\alpha}(cI)$ (I je identická matica)
4. Existuje nenulový vektor $\vec{\alpha}$ taký, že $\vec{\alpha}(A - cI) = \vec{0}$
5. Jadro zobrazenia s maticou $A - cI$ je netriviálne (t.j. toto zobrazenie nie je injektívne, t.j. matica $A - cI$ je singulárna).
6. Determinant matice $A - cI$ je nulový.

Charakteristický polynóm

Definícia

charakteristický polynóm

$$ch_A(x) = |A - xI|$$

$$\vec{\alpha}(A - cI) = \vec{0} \Rightarrow (A - cI)^T = \vec{0}^T$$

Vlastné čísla

Príklad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} ch_A(x) &= |A - xI| = \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 0 & 4-x \end{vmatrix} = \\ &= (1-x)(4-x) - 0 \cdot 2 = 4 - 5x + x^2 \end{aligned}$$

Vlastné vektory k 1: $[(-3, 2)]$

Vlastné vektory k 4: $[(0, 1)]$

Vlastné čísla

Príklad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$ch_A(x) = (1 - x)^3$$

Vlastné vektory k 1: $[(0, 0, 1)]$

Báza z vlastných vektorov

Veta

Nech $A = ||a_{ij}||$ je štvorcová matica typu $n \times n$ nad poľom F . Potom A je podobná s diagonálnou maticou práve vtedy, keď spomedzi vlastných vektorov vieme vybrať bázu.

Rôzne vlastné čísla

Lema

Nech $A = ||a_{ij}||$ je štvorcová matica typu $n \times n$ nad poľom F a vlastné čísla $c_1, \dots, c_k$ matice A sú navzájom rôzne prvky poľa F , $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_k$ sú vlastné vektory po rade prislúchajúce $c_1, \dots, c_k$.

Potom sú vektory $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_k$ lineárne nezávislé.

(Stručne: Rôznym vlastným číslam zodpovedajú lineárne nezávislé vlastné vektory.)

Dôsledok

Nech $A = ||a_{ij}||$ je štvorcová matica typu $n \times n$ nad poľom F a vlastné čísla $c_1, \dots, c_n$ matice A sú navzájom rôzne prvky poľa F (t.j. A má n navzájom rôznych vlastných čísiel z poľa F). Potom A je podobná s diagonálnou maticou.

Charakteristický polynóm

Lema

Nech A, B sú štvorcové matice typu $n \times n$ nad poľom F . Ak A a B sú podobné, tak $ch_A(x) = ch_B(x)$.

Dôsledok

Pre maticu $A = ||a_{ij}||$ - štvorcová matica typu $n \times n$ nad poľom F položíme $\text{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ - t.j. $\text{Tr}(A)$ je súčet prvkov na diagonále matice A . Ak sú matice A, B podobné, tak $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B)$.

Hodnota $\text{Tr}(A)$ sa nazýva stopa matice A .

Koeficienty charakteristického polynómu

$$\chi_A(x) = |A - xI| = \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} - x \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}(a_{11} - x) \cdots (a_{nn} - x) &= (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} (a_{11} + \dots + a_{nn}) x^{n-1} + \dots \\ &= (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} \operatorname{Tr}(A) x^{n-1} + \dots\end{aligned}$$

Koeficienty charakteristického polynómu

$$\chi_A(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_0$$

$$c_n = (-1)^n$$

$$c_{n-1} = (-1)^{n-1} \operatorname{Tr}(A) = a_{11} + \cdots + a_{nn}$$

$$c_0 = \det(A)$$

Ortogonalna podobnosť

Ortogonalna matica je definovaná ako matica P spĺňajúca podmienku $P^T = P^{-1}$

Matice A a B sú *ortogonálne podobné*, ak existuje ortogonálna matica P taká, že

$$B = PAP^{-1} = PAP^T.$$

Ortogonalné matice

Ortogonalné matice:

$$PP^T = P^T P = I$$

- ▶ Ekvivalentne: Riadky (stĺpce) sú ortonormálne vektory.
- ▶ Neskôr: Zachovávajú skalárny súčin.
- ▶ Teda zachovávajú aj veľkosť, kolmosť, uhly.

Schurova veta

Veta (Schurova veta)

Nech $A = ||a_{ij}||$ je štvorcová matica typu $n \times n$ nad poľom $\mathbb{R}$. Nech všetky vlastné čísla matice A sú z poľa $\mathbb{R}$. Potom existuje horná trojuholníková matica T , ktorá je ortogonálne podobná s maticou A .

Vlastné čísla symetrickej matice

Veta

Nech $A = ||a_{ij}||$ je štvorcová symetrická matica typu $n \times n$ nad poľom $\mathbb{R}$, potom všetky vlastné čísla matice A sú z poľa $\mathbb{R}$.

Veta o hlavných osiach

Veta (o hlavných osiach)

Nech $A = ||a_{ij}||$ je štvorcová symetrická matica typu $n \times n$ nad poľom $\mathbb{R}$, potom A je ortogonálne podobná s diagonálnou maticou.

Ortogonalna podobnosť

Príklad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 4 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Spektrálny rozklad

$$\begin{aligned}
 A &= (\vec{\alpha}_1^T \quad \dots \quad \vec{\alpha}_n^T) \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \vec{\alpha}_n \end{pmatrix} \\
 &= (\vec{\alpha}_1^T \quad \dots \quad \vec{\alpha}_n^T) \begin{pmatrix} d_1 \vec{\alpha}_1 \\ \vdots \\ d_n \vec{\alpha}_n \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$A = d_1 \vec{\alpha}_1^T \vec{\alpha}_1 + d_2 \vec{\alpha}_2^T \vec{\alpha}_2 + \dots + d_n \vec{\alpha}_n^T \vec{\alpha}_n \quad (1)$$

Cayley-Hamiltonova veta

Veta (Cayley-Hamilton)

Nech A je štvorcová matica nad poľom F . Potom A je koreňom svojho charakteristického polynómu, presnejšie ak je

$$ch_A(x) = (-1)^n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_0 \text{ tak}$$

$$(-1)^n A^n + c_{n-1} A^{n-1} + \cdots + c_0 I = \|0\|_{n \times n}.$$

Cayley-Hamiltonova veta

$$A \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = |A| \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = |A| \cdot I,$$

Cayley-Hamiltonova veta

$$\text{adj}(A - xI) = \text{adj}(B) = C_{n-1}x^{n-1} + \cdots + C_1x + C_0$$

Označme si $ch_A(x) = |B| = (-1)^n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1x + c_0$

$$\begin{aligned}|B| \cdot I &= (-1)^n Ix^n + c_{n-1} \cdot Ix^{n-1} + \cdots + c_1 \cdot Ix + c_0 I \\ &= B \cdot \text{adj}(B) = (A - xI) \cdot (C_{n-1}x^{n-1} + \cdots + C_1x + C_0)\end{aligned}$$

Cayley-Hamiltonova veta

$$c_0 I = AC_0$$

$$c_1 I = AC_1 - C_0$$

$$c_2 I = AC_2 - C_1$$

$$\dots$$

$$c_{n-1} I = AC_{n-1} - C_{n-2}$$

a nakoniec

$$(-1)^n I = -C_{n-1}$$

Cayley-Hamiltonova veta

$$c_0 I = AC_0$$

$$c_1 A = A^2 C_1 - AC_0$$

$$c_2 A^2 = A^3 C_2 - A^2 C_1$$

...

$$c_{n-1} A^{n-1} = A^n C_{n-1} - A^{n-1} C_{n-2}$$

a nakoniec

$$(-1)^n A^n = -A^n C_{n-1}$$

Po sčítaní ľavých a pravých strán týchto rovníc dostaneme

$$ch_A(A) = 0.$$