

## Priestory so skalárnym súčinom

- Zistite, či daný predpis určuje skalárny súčin na  $\mathbb{R}^3$ . Nech  $\vec{\alpha} = (a_1, a_2, a_3)$  a  $\vec{\beta} = (b_1, b_2, b_3)$ .
  - $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = a_1b_1 - a_1b_2 + a_1b_3 + a_2b_1 + 3a_2b_2 - a_3b_3$
  - $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = a_1b_1 + 2a_1b_2 + 2a_2b_1$
  - $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = 3a_1b_2 + 2a_2b_2 + a_3b_3$
  - $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
  - $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + 3a_2b_2 + a_3b_3$
  - $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2 + 2a_3b_3$
  - $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = a_1b_1 + 2a_1b_2 + 2a_2b_1 + a_2b_2 + 2a_3b_3$
  - $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = a_1b_2 + a_2b_1$
  - $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = 3a_1b_1 + 2a_1b_2 + a_2b_1 + 3a_3b_3$
  - $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_1b_3 + a_3b_1 + 2a_2b_2 + 3a_3b_3$
  - $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = 2a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_1b_3 + a_3b_1 + a_2b_2 + a_2b_3 + a_3b_2 + a_3b_3$
- Pre ľubovoľnú symetrickú maticu  $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$  definujeme  $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x}A\vec{y}^T$ . Nájdite príklad matice, kedy tento predpis definuje skalárny súčin na  $\mathbb{R}^n$ . Nájdite aj príklad matice, kedy to tak nie je. Ktoré vlastnosti z definície skalárneho súčinu budú splnené pre každú symetrickú reálnu maticu?
- Overte či predpis
  - $\langle f, g \rangle = f(0)g(0) + f(1)g(1)$
  - $\langle f, g \rangle = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1)$
 určuje skalárny súčin na priestore  $P_2$  všetkých polynómov stupňa najviac 2 nad poľom  $\mathbb{R}$ .
- Nech  $V$  je množina všetkých postupností reálnych čísel, ktoré sú od istého člena nulové. Ukážte, že predpis

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$$

definuje skalárny súčin na tomto priestore.

- Nech  $V = C(0, 1)$  je priestor všetkých spojitých funkcií  $\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ . Ukážte, že predpis

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) \, dx$$

definuje skalárny súčin na tomto priestore.

- Zistite, či  $\sin \pi x$  a  $\cos \pi x$  sú kolmé v priestore  $C(0, 1)$  so skalárnym súčinom z predchošej úlohy. Akú majú tieto vektory veľkosť?
- Overte, že v priestore  $C(0, 2\pi)$  všetkých spojitých funkcií z uzavretého intervalu  $\langle 0, 2\pi \rangle$  do  $\mathbb{R}$  so skalárnym súčinom  $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$  sú ľubovoľné dve rôzne funkcie z množiny  $\{1, \sin nx, \cos nx; n \in \mathbb{N}\}$  na seba kolmé. (Po vynormovaní by sme dostali množinu funkcií, ktorá má v tomto priestore do istej miery podobné vlastnosti ako ortonormálna báza v konečnorozmerných priestoroch. Tento systém funkcií je dôležitý v matematickej analýze v súvislosti s *Fourierovými radmi*.)
- Dokážte, že v ľubovoľnom euklidovskom priestore platí:
  - $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = 0 \Rightarrow |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 = |\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2$  (Pytagorova veta)
  - $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 = |\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2 + 2\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle$  (kosínová veta)
  - $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 + |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = 2(|\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2)$  (rovnobežníkové pravidlo)
- Ukážte, že pre ľubovoľné dva vektory  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  v euklidovskom vektorovom priestore platí  $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$  práve vtedy, keď vektory  $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$  a  $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$  sú na seba kolmé.

10. Nech  $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$ , kde  $V$  je euklidovský vektorový priestor. Dokážte, že  $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$  práve vtedy, keď  $(\forall c \in \mathbb{R}) |\vec{\alpha} + c\vec{\beta}| \geq |\vec{\alpha}|$ .
11. Dokážte, že ak  $S$  je vektorový podpriestor euklidovského vektorového priestoru, tak  $S \cap S^\perp = \{\vec{0}\}$ .
12. Nájdite bázu a dimenziu  $S^\perp$  pre daný podpriestor  $S$  priestoru  $\mathbb{R}^4$ :
- $S = [(1, 1, 0, 1), (2, 1, 0, 1)]$
  - $S = [(1, 5, 4, 3), (2, -1, 2, -1)]$
  - $S = [(1, 2, 1, 1), (2, 1, -1, -1)]$
  - $S = [(1, 2, 3, 4), (1, 1, 1, 1), (4, 3, 2, 1)]$
  - $S = [(2, 1, 2, 3), (0, 1, -2, 1), (1, 0, 2, 1)]$
  - $S = [(1, 1, 1, 2), (1, 0, 1, 1), (0, 1, 2, 1)]$
13. Nájdite ortogonálnu bázu daného podpriestoru v  $\mathbb{R}^n$  (so štandardným skalárnym súčinom):
- $S = [(1, 0, 1, 0), (0, 2, -1, 1), (0, 2, 1, 3)]$
  - $S = [(1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 2), (0, 1, 2, 1)]$
  - $S = [(1, 1, 1, 1, 0), (1, 0, 1, 2, 1), (0, 1, 2, 1, 1)]$
14. Nájdite ortonormálnu bázu pre priestory z úlohy 12.
15. Nájdite ortogonálnu bázu priestoru  $V = [(1, 0, 1, 0), (0, 2, -1, 1), (0, 2, 1, 3)]$ .
16. Ukážte, že pre ľubovoľný podpriestor  $S$  euklidovského vektorového priestoru  $V$  platí  $S^{\perp\perp} = S^\perp$ . (Hint: Skúste si uvedomiť, ktorú z inklúzií medzi  $S$  a  $S^\perp$  sme v dôkaze, že  $S^{\perp\perp} = S$  platí v konečnorozmerných priestoroch, dokázali bez použitia predpokladu o konečnorozmernosti. Túto inklúziu použite raz pre  $S$  a raz pre  $S^\perp$ .)
17. Nech  $S$  je podpriestor konečnorozmerného euklidovského vektorového priestoru  $V$ . Nech  $p: V \rightarrow V$  je ortogonálna projekcia na tento podpriestor. Overte, že:
- $p$  je lineárne zobrazenie;
  - $\text{Im } p = S$  a  $\text{Ker } p = S^\perp$ ;
  - $p \circ p = p$ .
18. Nájdite maticu ortogonálnej projekcie pri obvyklom skalárnom súčine pre:
- priestory z úlohy 12;
  - pre ľubovoľný podpriestor  $S = [\vec{\alpha}]$ , pričom vektor  $\vec{\alpha}$  je normovaný (má jednotkovú dĺžku);
  - pre podpriestor  $S = [\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_k]$ , pričom vektory  $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_k$  sú ortonormálne. [Odpovede: b)  $\vec{\alpha}^T \vec{\alpha}$ ; c)  $A^T A$ , kde  $A$  je matica, ktorej riadky tvoria vektory  $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_k$ ; toto sa inak dá zapísať aj ako  $\vec{\alpha}_1^T \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2^T \vec{\alpha}_2 + \dots + \vec{\alpha}_k^T \vec{\alpha}_k$ .]
19. V  $\mathbb{R}^4$  so štandardným skalárnym súčinom nájdite vyjadrenie vektora  $(4, 1, 1, 6)$  ako súčtu vektora z podpriestoru  $L$  a vektora z  $L^\perp$ , ak  $L = [(1, 2, -2, -1), (2, 3, 3, 2), (1, 1, 2, 1)]$ .
20. [P, 1370] Nájdite kolmý priemet vektora  $\vec{x} = (4, -1, -3, 4)$  do podpriestoru  $S = [(1, 1, 1, 1), (1, 2, 2, -1), (1, 0, 0, 3)]$ . [Výsledok by mal byť  $(1, -1, -1, 5)$ .]
21. [P, 1372] Nájdite kolmý priemet vektora  $\vec{x} = (7, -4, -1, 2)$  na podpriestor  $S$  určený systémom rovníc
- $$\begin{array}{rrrrr} 2x_1 & +x_2 & +x_3 & +3x_4 & = 0 \\ 3x_1 & +2x_2 & +2x_3 & +x_4 & = 0 \\ x_1 & +2x_2 & -2x_3 & +9x_4 & = 0 \end{array}$$
22. Nájdite ortogonálnu projekciu vektora  $\vec{a} = (9, 3, 3, 1)$  do podpriestoru  $S = [(0, 1, 1, 1), (2, 1, 2, 1), (2, 0, 1, 2)]$ . [Výsledok je  $(8, 1, 5, 1)$ .]

## Literatúra

- [P] I. V. Proskurjakov. *Sbornik zadač po lineinoi algebre*. Binom, Moskva, 9 izd. edition, 2005.