Rekurencie a Fibonacciho postupnosť

Fibonacciho postupnosť je určená rekurentným predpisom

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \tag{1}$$

a počiatočnými hodnotami $F_0 = 0$, $F_1 = 1$.

1. a) Nájdite možné predpisy postupností (x_n), (y_n) pre ktoré platí:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 2x_n + y_n \\ y_{n+1} &= x_n + 2y_n \end{aligned}$$

(Hint: Pomôže pozrieť sa na postupnosti $a_n = x_n + y_n$ a $b_n = x_n - y_n$?)
b) Nájdite možné predpisy postupností (x_n), (y_n) pre ktoré platí:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 3x_n - 4y_n \\ y_{n+1} &= 2x_n - 3y_n \end{aligned}$$

2. Nech $A = \begin{pmatrix} -4 & -15 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ a $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$. Dokážte, že pre pre $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, platí $3a_n + b_n + 3c_n + 4d_n = 7$. (Niekoľko hintov – každý vedie k inému riešeniu. Hint 1: Ak nájdete riadkové a stĺpcové vlastné vektory tejto matice, čo viete o $\vec{r}A^n$ a $A^n\vec{c}^T$? Hint 2: Vedeli by ste nájsť P_n a Q_n také, že $A^n = P_nA + Q_nI$? Hint 3: Asi by ste mali byť schopní nájsť aj všeobecné vyjadrenie pre a_n, b_n, c_n, d_n – aj keď takýto postup je asi zdĺhavejší než postupy spomenuté v predošlých dvoch hintoch.)
3. Ukážte, že pre maticu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ platí

$$A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

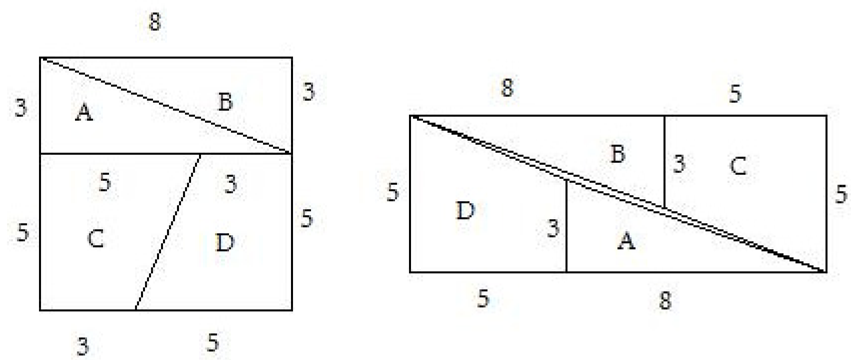
4. Dal by sa pomocou (2) nájsť algoritmus na výpočet n-tého Fibonacciho čísla, ktorý je efektívnejší ako postupné počítanie $F_1, F_2, \dots, F_n$ na základe rekurencie $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.
5. Skontrolujte, že pre túto maticu platí $A^2 = A + I$. Vedeli by ste z toho dostať, že platí $A^{-1} = A - I$?
6. Označme ako $\varphi_{1,2}$ korene polynómu $x^2 - x - 1$. (T.j. $\varphi_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ a platí $\varphi_1 + \varphi_2 = 1$, $\varphi_1 \cdot \varphi_2 = -1$.) Ukážte, že $\varphi_{1,2}$ sú vlastné čísla matice A z rovnosti (2). Viete na základe rovnosti $PAP^{-1} = D$ resp. $P^{-1}DP = A$ povedať niečo o F_n?
7. Nájdite reálne čísla $c_{1,2}$ také, že $F_n = c_1\varphi_1^n + c_2\varphi_2^n$; takto by sa mali dostať Binetovu formulu:

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}. \tag{3}$$

8. Uvažujme rekurenciu takú, že $A_{n+1} = aA_n + bA_{n-1}$, kde $a, b \in \mathbb{C}$ sú nejaké konštanty. (Ak sú zadané A_0 a A_1, tak tento vzťah jednoznačne určuje všetky členy tejto postupnosti.)
a) Ukážte, že platí

$$\begin{pmatrix} A_{n+1} \\ A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n \\ A_{n-1} \end{pmatrix} \tag{4}$$

Vieme na základe toho dostať nejaký vzťah (resp. nejakú maticovú rovnosť) pre A_n?
b) Ukážte, že charakteristický polynóm tejto matice je $\chi_A(x) = x^2 - ax - b$.



Obr. 1: Cassiniho identita.

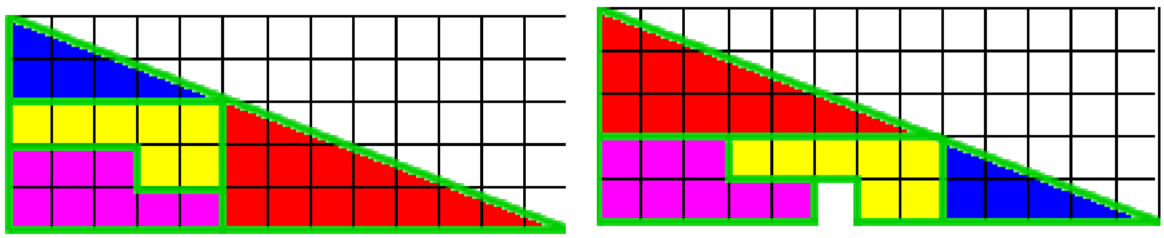
c) Ukážte, že ak $\chi_A(x)$ má dva rôzne korene $\lambda_{1,2}$, tak existujú konštanty $c_{1,2}$ také, že $A_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$.
d) Predpokladajme teraz, že $\chi_A(x)$ má dvojnásobný koreň λ. Ak by sme navyše vedeli, že matica $\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ je podobná s niektorou z matíc[1]

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Potom sa podobným spôsobom dá ukázať, že existujú konštanty $c_{1,2}$ také, že $A_n = c_1\lambda^n + c_2 n\lambda^n$.

9. Nech V je vektorový priestor všetkých reálnych postupností.
   a) Ukážte, že pre ľubovoľné dve rôzne reálne čísla $\lambda_{1,2}$ sú postupnosti $(\lambda_1^n)_{n=0}^\infty$ a $(\lambda_2^n)_{n=0}^\infty$ lineárne nezávislé.
   b) Ukážte, že pre ľubovoľné dve rôzne reálne číslo λ sú postupnosti $(\lambda^n)_{n=0}^\infty$ a $(n\lambda^n)_{n=0}^\infty$ lineárne nezávislé.
   c) Ukážte, že podpriestor pozostávajúci zo všetkých riešení rekurencie $A_{n+1} = aA_n + bA_{n-1}$ má dimenziu 2.
10. Ukážte pomocou (2):
    a) $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ (Cassiniho identita)
    b) $F_{m+n} = F_m F_{n+1} + F_{m-1}F_n$ (konvolučná vlastnosť)
    c) $F_{2n} = F_n(F_{n+1} + F_{n-1})$ a $F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$.
11. Dokážte, že $\sum_{k=0}^n F_{2k+1} = F_{2(n+1)}$ a $\sum_{k=0}^n F_{2k} = F_{2n+1} - 1$.
12. Ukážte, že $\sum_{k=0}^n F_k^2 = F_n F_{n+1}$. (Hint k maticovému odvodeniu: Čomu sa rovná $(A^k)^2$? Iná možnosť: Mohla by pomôcť predošlá úloha.)
13. Ukážte, že $F_{2n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k$. (Hint k maticovému odvodeniu: Skúste využiť rovnosť $A^2 = I + A$.)
14. Nájdite vzorec pre F_{j+k+l} a pre F_{3n}.
15. Ukážte, že pre Fibonacciho postupnosť platí:
    a) $F_n \mid F_{kn}$,
    b) $(F_n, F_{n+1}) = 1$,
    c) $(F_{kn+r}, F_n) = (F_r, F_n)$,

[1] Toto vyplýva napríklad z výsledkov o Jordanovom normálnom tvare – ten sme však zatiaľ neprebrali, resp. neskôr ho stručne spomenieme bez dôkazu.



Obr. 2: Missing square puzzle

d) $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$.
Koľko delení so zvyškom je potrebné vykonať, ak hľadáme (F_n, F_{n-1}) pomocou Euklidovho algoritmu?[2]

[2]Táto úloha nesúvisí s maticami – spomenul som ju preto, že hovorí niečo o počte krokom, ktoré treba v Euklidovom algoritme.