

Podobnosť s diagonálnou maticou

- Ukážte, že pre determinant blokovej matice platí

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(D)$$

(Zápisy použité v tomto zadání treba chápať ako zápisy blokových matic, t.j. A je nejaká matica typu $m \times m$, B je typu $k \times k$ a C má rozmery $m \times k$. Hint: Možno sa oplatí začať tým, že si rozmyslíte, ako to je s determinantmi nejakých jednoduchších matic – napríklad $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I \end{pmatrix}$ alebo $\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$. Hint 2: Môže byť užitočný súčin blokových matic. Hint 3: Možno sa oplatí skúsiť nejakou použiť Laplaceov rozvoj.)¹

- Pre dané matice nad poľom $\mathbb{C}$ nájdite charakteristický polynóm, vlastné čísla, vlastné vektory a zistite, či je táto matica podobná s diagonálnou maticou.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

3.

Ortogonalná podobnosť

Veta o hlavných osiach: Lubovoľná reálna symetrická matica je ortogonálne podobná s diagonálnou maticou. (T.j. existujú ortogonálna matica P a diagonálna matica D , také, že $PAP^{-1} = PAP^T = D$.)

Ortogonalná matica je taká reálna matica, pre ktorú platí $P^{-1} = P^T$, t.j. $PP^T = P^T P = I$. Ekvivalentná podmienka: Riadky (stĺpce) tvoria ortonormálnu bázu v $\mathbb{R}^n$.

Pre symetrickú reálnu maticu platí, že vlastné vektory zodpovedajúce rôznym vlastným hodnotám sú na seba kolmé.

- Nech A je symetrická matica a $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$ sú rôzne vlastné hodnoty. Ukážte, že zodpovedajúce vlastné vektory sú lineárne nezávislé.
- Ukážte, že ak $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ sú ortogonálne matice, tak aj AB a A^{-1} sú ortogonálne. (Z toho vidíme aj to, že množina všetkých ortogonálnych matic rozmerov $n \times n$ s operáciou násobenia matic tvorí grupu. Táto grupa sa zvykne nazývať *ortogonalná grupa* a označovať $O(n)$.)
- Ukážte, že ortogonalná podobnosť je relácia ekvivalencie na množine $M_{n,n}(\mathbb{R})$.
- Ukážte, že ak A je symetrická matica a B je ortogonálne podobná s A , tak aj B je symetrická.
- Ukážte, že lubovoľná ortogonalná matica rozmerov 2×2 má tvar

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \text{alebo} \quad \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}$$

pre nejaké $\varphi \in \mathbb{R}$.

- Nájdite (ak taká matica existuje) ortogonálnu maticu P takú, že $PAP^T = D$ je diagonálna matica.
 - $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
 - $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

¹Táto úloha bola aj v sade o determinantoch – spomenul som ju znovu, lebo sa občas môže hodiť pri výpočte charakteristického polynómu.

- c) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
d) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$
e) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
f) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
g) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
h) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
i) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$
j) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
k) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

Riešenia: a) $D = \text{diag}(0, 0, 3)$, b) $D = \text{diag}(-1, -4, 6)$, c) $D = \text{diag}(-3, 1, 4)$, d) $D = \text{diag}(-5, 1, 7)$, e) $D = \text{diag}(-5, -3, 1, 3)$, f) $D = \text{diag}(-1, -1, 1, 5)$, g) $D = \text{diag}(1, 3, 7)$, h) $D = \text{diag}(-3, -1, 3)$, i) $D = \text{diag}(1, 1, 7)$, j) $D = \text{diag}(0, 2, 2)$, k) $D = \text{diag}(2, 2, 7)$,

7. Z údajov ktoré sú zadané o reálnej symetrickej matici A zistite, ako vyzerá kanonický tvar príslušnej kvadratickej formy.

- a) Matica A je *kladne definitná* symetrická matica rozmerov $n \times n$.
b) Matica A je *záporne definitná* symetrická matica rozmerov $n \times n$.
c) A je nenulová symetrická matica rozmerov 3×3 , ktorá má nulovú stopu aj determinant, t.j. $\det(A) = \text{Tr}(A) = 0$.

8. Pre danú symetrickú maticu A nájdite diagonálnu maticu D a ortogonálnu maticu P také, že platí $PAP^T = D$.

- a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; d) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;
e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; f) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; g) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; h) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 3 \\ 3 & 3 & 9 \end{pmatrix}$;
i) $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; j) $A = \begin{pmatrix} 11 & -8 & 4 \\ -8 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

Výsledky: a) $\text{diag}(0, 4, 10)$; b) $\text{diag}(-1, -1, 2)$; c) $\text{diag}(1, 1, -1)$; d) $\text{diag}(-1, -1, 5)$; e) $\text{diag}(0, 0, 6)$; f) $\text{diag}(-3, -3, 3)$; g) $\text{diag}(-1, -1, 5)$; h) $\text{diag}(0, 5, 12)$; i) $\text{diag}(-3, -4, 6)$; j) $\text{diag}(-5, -5, 16)$;