

Výber s opakovaním

24. februára 2025

Permutácie s opakovaním

Definícia

Ak máme k dispozícií prvky k rôznych typov, pričom počty prvkov jednotlivých typov sú $n_1, \dots, n_k$ a celkový počet je $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$. O *permutáciach s opakovaním* hovoríme, ak sa pozeráme na všetky možné takéto usporiadania.

Multinomický koeficient:

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

Permutácie s opakovaním

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

- ▶ Máme $n!$ usporiadaní pre n prvkov.
- ▶ Z nich skupiny veľkosti $n_1! n_2! \dots n_k!$ predstavujú to isté usporiadanie.

Permutácie s opakovaním

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$
$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \binom{n}{n_1} \binom{n - n_1}{n_2} \dots \binom{n - n_1 - \dots - n_{k-2} - n_{k-1}}{n_k}$$

Kombinácie s opakovaním

Chceme kúpiť n kníh; vyberáme spomedzi A , B , C . (Môžeme kúpiť aj viacero kusov tej istej knihy.)
Skúsme $n = 3$; dosť malá hodnota na to, aby sme vedeli vypísať všetky možnosti.

Kombinácie s opakovaním

AAA

AAB

AAC

ABB

ABC

ACC

BBB

BBC

BCC

CCC

Kombinácie s opakovaním

AAA||

AA|B|

AA||C

A|BB|

A|B|C

A||CC

|BBB|

|BB|C

|BC|C

||CCC

Kombinácie s opakovaním

Tvrdenie

Počet kombinácii s opakovaním k -tej triedy z n prvkov je rovný

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}.$$

$$\left(\binom{n}{k}\right) = \frac{(n+1) \cdots (n+k-1)}{k!} = \frac{(n+1)^{\overline{k}}}{k!}$$

Kombinácie s opakovaním

- ▶ Dôkaz cez stars and bars;
- ▶ dôkaz matematickou indukciou.

$$K'(n, k) = K'(n-1, k) + K'(n, k-1)$$
$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-2}{k-1} + \binom{n+k-2}{k-2}$$

Počet riešení

Tvrdenie

Pre dané $k, n \in \mathbb{N}_0$ je počet riešení rovnice

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$$

takých, že $x_i \in \mathbb{Z}$ a $x_i \geq 0$, je rovný

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}.$$

Počet nezáporných riešení

Príklad

Koľko je celočíselných riešení $x_1 + x_2 + x_3 = 5$ takých, že $x_{1,2,3} \geq 0$?

$$\binom{7}{2} = 21$$

Počet nezáporných riešení

$0 + 0 + 5$	$1 + 1 + 3$	$2 + 3 + 0$
$0 + 1 + 4$	$1 + 2 + 2$	$3 + 0 + 2$
$0 + 2 + 3$	$1 + 3 + 1$	$3 + 1 + 1$
$0 + 3 + 2$	$1 + 4 + 0$	$3 + 0 + 2$
$0 + 4 + 4$	$2 + 0 + 3$	$4 + 0 + 1$
$0 + 5 + 0$	$2 + 1 + 2$	$4 + 1 + 0$
$1 + 0 + 4$	$2 + 2 + 1$	$5 + 0 + 0$

Počet kladných riešení

Príklad

Koľko je celočíselných riešení rovnice

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$$

takých, že $x_{1,2} \geq 1$ a $x_{3,4} \geq 2$?

Substitúcia: $y_1 = x_1 - 1$, $y_2 = x_2 - 1$, $y_3 = x_3 - 2$, $y_4 = x_4 - 2$;
teraz máme $y_i \geq 0$.

$$(x_1 - 2) + (x_2 - 2) + (x_3 - 1) + (x_4 - 1) = 6$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 6$$

Podľa predošlého tvrdenia je takýchto štvoríc presne $\binom{9}{3}$.

Počet kladných riešení

Dôsledok

Pre dané $k, n \in \mathbb{N}_0$ je počet riešení rovnice

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$$

taký, že $x_i \in \mathbb{Z}$ a $x_i \geq 1$ rovný presne

$$\binom{n-1}{k-1}.$$

Hokejková identita

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{k-1} = n - j$$

- ▶ Pre $x_k = 0$ máme máme $\binom{n+k-2}{k-2}$ riešení.
- ▶ Pre $x_k = 1$ máme máme $\binom{n+k-3}{k-2}$ riešení.
- ▶ $\vdots$
- ▶ Pre $x_k = n$ máme máme $\binom{k-2}{k-2}$ riešení.

Hokejková identita

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{k-1} = n - j$$

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \sum_{j=0}^n \binom{n+k-2-j}{k-2}$$

Hokejková identita

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \sum_{j=0}^n \binom{n+k-2-j}{k-2}$$

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \sum_{i=k-2}^{n+k-2} \binom{i}{k-2}$$

Po substitúcii $l = k - 2$ a $m = n + k - 2$:

$$\binom{m+l+1}{l+1} = \sum_{i=l}^m \binom{i}{l}.$$