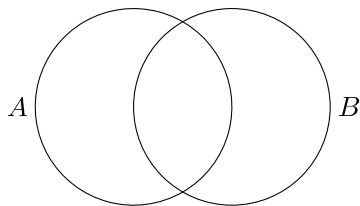


Princíp zapojenia a vypojenia

17. marca 2025

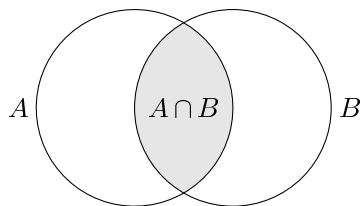
Počet prvkov $|A \cup B|$

$$|A \cup B| \stackrel{?}{=} |A| + |B|$$



Počet prvkov $|A \cup B|$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



Počet prvkov $|A \cup B|$

$$\begin{aligned}|A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\ |X \setminus (A \cup B)| &= |X| - |A| - |B| + |A \cap B|\end{aligned}$$

Počet prvkov $|A \cup B \cup C|$

$$|A \cup B \cup C| = ?$$

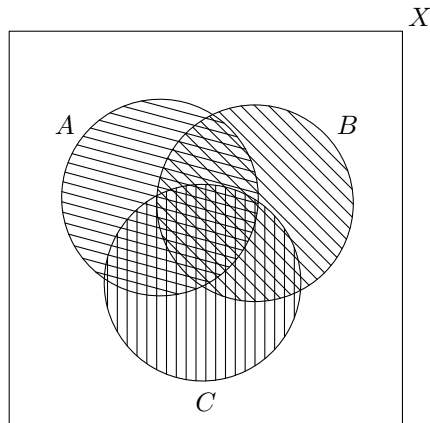
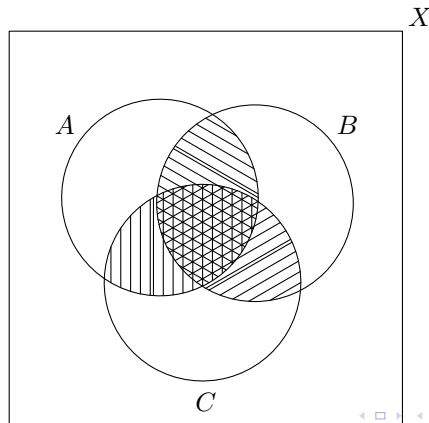


Figure: Prvky, ktoré sme započítali viackrát

Počet prvkov $|A \cup B \cup C|$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$



Počet prvkov $|A \cup B \cup C|$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| \\ - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$|X \setminus (A \cup B \cup C)| = |X| - |A| - |B| - |C| \\ + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|$$

Princíp zapojenia a vypojenia

Veta (Princíp zapojenia a vypojenia)

Nech $A_1, \dots, A_n$ sú konečné množiny a všetky z nich sú podmnožinami konečnej množiny X . Potom pre počet prvkov ich zjednotenia platí:

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| &= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \dots \\ &\dots + (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}| + \dots \\ &\dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| \end{aligned}$$

Princíp zapojenia a vypojenia

Ekvivalentne:

$$\begin{aligned}
 \left| X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) \right| &= |X| - \sum_{i=1}^n |A_i| + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \dots \\
 &\quad \dots + (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}| + \dots \\
 &\quad + \dots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|
 \end{aligned}$$

Princíp zapojenia a vypojenia

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\dots,n\} \\ |I|=k}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$

Dôkaz

Nech x patrí práve do s množín z $A_1, \dots, A_n$.

$$\begin{aligned}P &= \sum_{k=1}^s (-1)^{k+1} \binom{s}{k} \\&= - \sum_{k=1}^s (-1)^k \binom{s}{k} \\&= 1 - \sum_{k=0}^s (-1)^k \binom{s}{k} \\&= 1\end{aligned}$$

Dôkaz pomocou charakteristických funkcií

$$\chi_A: M \rightarrow \{0, 1\}$$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{ak } x \in A, \\ 0 & \text{ak } x \notin A. \end{cases}$$

Dôkaz pomocou charakteristických funkcií

$$M = \bigcup_{i=1}^n A_i$$

$$M_I = \bigcap_{i \in I} A_i$$

$$\chi_M(x) \stackrel{?}{=} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\dots,n\} \\ |I|=k}} \chi_{M_I}(x)$$

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\dots,n\} \\ |I|=k}} \chi_{M_I}(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} = 1$$

Dôkaz pomocou charakteristických funkcií

$$\chi_M(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\dots,n\} \\ |I|=k}} \chi_{M_I}(x)$$

$$\sum_{x \in M} \chi_M(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\dots,n\} \\ |I|=k}} \sum_{x \in M} \chi_{M_I}(x)$$

$$|M| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\dots,n\} \\ |I|=k}} |M_I|$$

Permutácie bez pevného bodu

D_n = počet permutácií $\varphi: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ takých, že

$$\varphi(i) \neq i$$

pre každé $i = 1, 2, \dots, n$.

$$D_4 = 9$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad
 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad
 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad
 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad
 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad
 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad
 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Permutácie bez pevného bodu

n	D_n
0	1
1	0
2	1
3	2
4	9
5	44
6	265
7	1 854
8	14 833
9	133 496

Rekurencie pre D_n

$$D_n = (n - 1)(D_{n-1} + D_{n-2}) \quad (1)$$

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n \quad (2)$$

Permutácie bez pevného bodu

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$$

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
D_n	1	0	1	2	9	44	265	1 854	14 833	133 496

Vyjadrenie pomocou PIE

Veta

Pre každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} = n! \left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right) \quad (3)$$

$$\frac{D_n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} = \left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right) \quad (4)$$

D_n a e

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$e^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} + \cdots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_n}{n!} = \frac{1}{e} \quad (5)$$

D_n a e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_n}{n!} = \frac{1}{e} \quad (6)$$

Pravdepodobnosť, že náhodne vybraná permutácia nemá pevné body, je približne $\frac{1}{e}$.

D_n a faktoriály

$$D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$
$$n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} D_k$$

Počet surjekcí

$\text{Sur}(n, k)$ = počet surjektivních zobrazení z n -prvkové množiny do k -prvkové množiny

$$\text{Sur}(n, k) = ?$$

Počet surjekcií

Tvrdenie

Nech $k, n \in \mathbb{N}_0$, $k < n$ a X, Y sú konečné množiny také, že $|A| = n$, $|B| = k$. Potom počet surjekcií z A do B je rovný

$$\text{Sur}(n, k) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n. \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \text{Sur}(n, k) = & k^n - k(k-1)^n + \binom{k}{2}(n-2)^n - \binom{k}{3}(k-3)^n + \dots \\ & \dots + (-1)^{k-2} \binom{k}{k-2} 2^n + (-1)^{k-1} \binom{k}{k-1} 1^n \end{aligned}$$

Eulerova funkcia

Definícia

Pre každé $n \in \mathbb{N}$ definujeme

$$\varphi(n) = |\{k \in \mathbb{N}; 1 \leq k \leq n, \gcd(k, n) = 1\}|,$$

t.j. $\varphi(n)$ označuje počet celých čísel $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, ktoré sú nesúdeliteľné s číslom n .

Túto funkciu $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ nazývame *Eulerova funkcia*.

Eulerova funkcia

n	$\varphi(n)$	$\{k; \gcd(k, n) = 1\}$
1	1	$\{1\}$
2	1	$\{1\}$
3	2	$\{1, 2\}$
4	2	$\{1, 3\}$
5	4	$\{1, 2, 3, 4\}$
6	2	$\{1, 5\}$
7	6	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
8	4	$\{1, 3, 5, 7\}$
9	6	$\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$
10	4	$\{1, 3, 7, 9\}$

Eulerova funkcia

$$\varphi(p) = p - 1$$

$$\varphi(p^a) = p^a - p^{a-1} = p^{a-1}(p - 1) = p^a \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Eulerova funkcia

Veta

Nech $n \in \mathbb{N}_0$. Potom platí

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right), \quad (8)$$

kde súčin na pravej strane prebieha cez všetky prvočíselné delitele čísla n .

$$\varphi(n) = \prod_{j=1}^k (p_j^{a_j} - p_j^{a_j-1}) = \prod_{j=1}^k p_j^{a_j-1} (p_j - 1).$$

Eulerova funkcia

$$A_i = \{s \in X; p_i \mid s\}.$$

$$\varphi(n) = |X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k)|.$$

$$|A_i| = \frac{n}{p_i}$$

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2}| = \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2}}$$

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_j}| = \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_j}}$$

Eulerova funkcia je multiplikatívna

Dôsledok

Ak $m, n \in \mathbb{N}$ sú nesúdeliteľné, t.j. $\gcd(m, n) = 1$, tak platí

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n).$$

Dôsledok

Pre ľubovoľné $m, n \in \mathbb{N}$ označme $d = \gcd(m, n)$. Potom platí

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)\frac{d}{\varphi(d)}.$$

Eulerova funkcia

Pre ľubovoľné $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d), \quad (9)$$

pričom sumu na pravej strane chápeme tak, že sčítujeme cez všetky *prirodzené* čísla d , ktoré sú deliteľmi čísla n .

Eulerova veta

Veta (Eulerova veta)

Nech $a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ sú také, že $\gcd(a, n) = 1$. Potom platí

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Veta (Malá Fermatova veta)

Nech $a \in \mathbb{Z}$ a p je prvočíslo. Potom platí

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Malá Fermatova veta

Veta (Malá Fermatova veta)

Nech $a \in \mathbb{Z}$ a p je prvočíslo. Potom platí

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Ekvivalentne: Pre ľubovoľné $a \in \mathbb{Z}$ platí

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

Rovnica $x_1 + \dots + x_k = n$ s obmedzeniami

V celých číslach pre rovnicu

$$x_1 + \dots + x_k = n$$

- ▶ $\binom{n+k-1}{k-1}$ je počet riešení takých, že $x_i \geq 0$;
- ▶ $\binom{n-1}{k-1}$ je počet riešení takých, že $x_i \geq 1$.

Vieme niečo povedať o počte riešení, ak budeme mať aj horné ohraničenia?

Rovnica $x_1 + \dots + x_k = n$ s obmedzeniami

Príklad

Koľko existuje riešení rovnice

$$x_1 + x_2 + x_3 = 15$$

v nezáporných celých čísla takých, že $x_1 \leq 3$, $x_2 \leq 6$, $x_3 \leq 12$?

Rovnica $x_1 + \dots + x_k = n$ s obmedzeniami

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3; x_1 + x_2 + x_3 = 15, \\ 0 \leq x_1 \leq 3, 0 \leq x_2 \leq 6, 0 \leq x_3 \leq 12\}$$

$$X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3; x_1 + x_2 + x_3 = 15, 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3\}$$

Rovnica $x_1 + \dots + x_k = n$ s obmedzeniami

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3; x_1 + x_2 + x_3 = 15, \\ 0 \leq x_1 \leq 3, 0 \leq x_2 \leq 6, 0 \leq x_3 \leq 12\}$$

$$A_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in X; x_1 \geq 4\}$$

$$A_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in X; x_2 \geq 7\}$$

$$A_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in X; x_3 \geq 13\}$$

$$|S| = |X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)|.$$

Rovnica $x_1 + \dots + x_k = n$ s obmedzeniami

$$|X| = \binom{17}{2}$$

$$|A_1| = \binom{13}{2}$$

$$|A_2| = \binom{10}{2}$$

$$|A_3| = \binom{4}{2}$$

$$|A_1 \cap A_2| = \binom{6}{2}$$

$$|A_1 \cap A_3| = 0$$

$$|A_2 \cap A_3| = 0$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

Rovnica $x_1 + \dots + x_k = n$ s obmedzeniami

$$\begin{aligned}|S| &= \binom{17}{2} - \binom{13}{2} - \binom{10}{2} - \binom{4}{2} + \binom{6}{2} \\&= 136 - 78 - 45 - 6 + 15 \\&= 22\end{aligned}$$

Rovnica $x_1 + \dots + x_k = n$ s obmedzeniami

$0 + 3 + 12$	$0 + 4 + 11$	$0 + 5 + 10$	$0 + 6 + 9$
$1 + 2 + 12$	$1 + 3 + 11$	$1 + 4 + 10$	$1 + 5 + 9$
$1 + 6 + 8$	$2 + 1 + 12$	$2 + 2 + 11$	$2 + 3 + 10$
$2 + 4 + 9$	$2 + 5 + 8$	$2 + 6 + 7$	$3 + 0 + 12$
$3 + 1 + 11$	$3 + 2 + 10$	$3 + 3 + 9$	$3 + 4 + 8$
$3 + 5 + 7$	$3 + 6 + 6$		

Rovnica $x_1 + \dots + x_k = n$ s obmedzeniami

Príklad

Aký je počet celočíselných riešení rovnice

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11$$

takých, že platí $0 \leq x_1 \leq 3$, $0 \leq x_2 \leq 4$ a $0 \leq x_3 \leq 6$?

$$11 = 1 + 4 + 6$$

$$11 = 2 + 3 + 6$$

$$11 = 2 + 4 + 5$$

$$11 = 3 + 2 + 6$$

$$11 = 3 + 3 + 5$$

$$11 = 3 + 4 + 4$$

Rovnica $x_1 + \dots + x_k = n$ s obmedzeniami

$$X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3; x_1 + x_2 + x_3 = 11, x_i \geq 0\}$$

$$A_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in X; x_i \geq 0, x_1 \geq 4\}$$

$$A_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in X; x_i \geq 0, x_2 \geq 5\}$$

$$A_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in X; x_i \geq 0, x_3 \geq 7\}$$

Rovnica $x_1 + \dots + x_k = n$ s obmedzeniami

$$|X| = \binom{13}{2}$$

$$|A_1| = \binom{9}{2}$$

$$|A_2| = \binom{8}{2}$$

$$|A_3| = \binom{6}{2}$$

$$|A_1 \cap A_2| = \binom{4}{2}$$

$$|A_1 \cap A_3| = \binom{2}{2}$$

Rovnica $x_1 + \dots + x_k = n$ s obmedzeniami

$$\begin{aligned}|X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)| &= \binom{13}{2} - \binom{9}{2} - \binom{8}{2} - \binom{6}{2} + \binom{4}{2} + \binom{2}{2} \\ &= 78 - 36 - 28 - 15 + 6 + 1 = 6\end{aligned}$$

Rovnica $x_1 + \dots + x_k = n$ s obmedzeniami

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11$$

$$0 \leq x_1 \leq 3, 0 \leq x_2 \leq 4 \text{ a } 0 \leq x_3 \leq 6$$

$$y_1 = 3 - x_1$$

$$y_2 = 4 - x_2$$

$$y_3 = 6 - x_3$$

$$0 \leq y_1 \leq 3, 0 \leq y_2 \leq 4 \text{ a } 0 \leq y_3 \leq 6$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11$$

$$(3 - x_1) + (4 - x_2) + (6 - x_3) = 13 - 11$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 2$$

Rovnica $x_1 + \dots + x_k = n$ s obmedzeniami

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11$$

$$0 \leq x_1 \leq 3, 0 \leq x_2 \leq 4 \text{ a } 0 \leq x_3 \leq 6$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 2$$

$$\binom{4}{2} = 6$$