

Hamiltonovské grafy

28. apríla 2025

Hamiltonovské kružnice

Definícia

Hamiltonovská kružnica je kružnica, ktorá obsahuje všetky vrcholy grafu. *Hamiltonovská cesta* je cesta, ktorá obsahuje všetky vrcholy grafu.

Graf, ktorý má hamiltonovskú kružnicu, voláme *hamiltonovský*.

Nerovnosť $c(G - S) \leq |S|$

Tvrdenie

Ak graf $G = (V, E)$ má hamiltonovskú kružnicu, tak pre každú neprázdnu podmnožinu $S \subseteq V$ platí

$$c(G - S) \leq |S|,$$

t.j. graf, ktorý vznikne z G vynechaním k vrcholov má nanajvýš k komponentov súvislosti.

Párne grafy

Tvrdenie

Nech $G = (V, E)$ je párny graf a $V = V_1 \cup V_2$ je nejaký rozklad vrcholov zodpovedajúci ofarbeniu dvoma farbami. Ak G má hamiltonovskú kružnicu, tak $|V_1| = |V_2|$.

Oreho a Diracova veta

Veta (Ore)

Nech G je graf na $n \geq 3$ vrcholoch. Ak súčet stupňov ľubovoľných dvoch vrcholov, ktoré nie sú spojené hranou, je aspoň n , tak G má hamiltonovskú kružnicu.

Z Oreho vety ľahko dostaneme ako dôsledok Diracovu vetu:

Dôsledok (Dirac)

Ak v grafe na n vrcholoch má každý vrchol stupeň aspoň $\frac{n}{2}$, tak G má hamiltonovskú kružnicu.

Bondy–Chvátalova veta

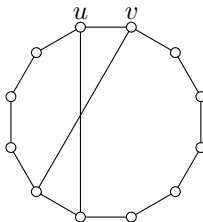
Veta (Bondy–Chvátal)

Nech G je graf s n vrcholmi. Nech u, v sú nejaké nesusedné vrcholy grafu G také, že

$$\deg(u) + \deg(v) \geq n.$$

Označme G' graf, ktorý vznikne z grafu G pridaním hrany medzi vrcholmi u a v .

Potom graf G má hamiltonovskú kružnicu práve vtedy, keď G' má hamiltonovskú kružnicu.



Bondy–Chvátalova veta

Veta (Bondy–Chvátal)

Nech G je graf s n vrcholmi. Nech u, v sú nejaké nesusedné vrcholy grafu G také, že

$$\deg(u) + \deg(v) \geq n.$$

Označme G' graf, ktorý vznikne z grafu G pridaním hrany medzi vrcholmi u a v .

Potom graf G má hamiltonovskú kružnicu práve vtedy, keď G' má hamiltonovskú kružnicu.

$c(G)$ = pridávame hrany pre nesusedné vrcholy také, že
 $\deg(u) + \deg(v) \geq n$.

Dôsledok

Graf G obsahuje hamiltonovskú kružnicu práve vtedy, keď jeho uzáver $c(G)$ obsahuje hamiltonovskú kružnicu.

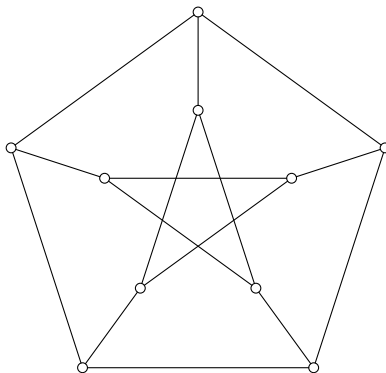
Bondy–Chvátalova veta

$c(G)$ = pridávame hrany pre nesusedné vrcholy také, že
 $\deg(u) + \deg(v) \geq n$.

Dôsledok

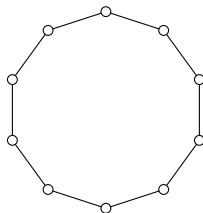
Graf G obsahuje hamiltonovskú kružnicu práve vtedy, keď jeho uzáver $c(G)$ obsahuje hamiltonovskú kružnicu.

Petersenov graf nie je hamiltonovský



Petersenov graf nemá kružnice dĺžok 3, 4.

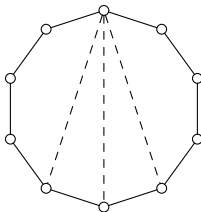
Petersenov graf nie je hamiltonovský



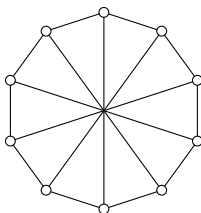
V každom vrchole našej kružnice chýba ešte jedna hrana.

Petersenov graf nie je hamiltonovský

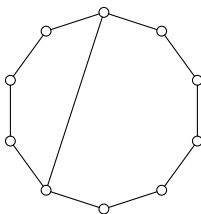
Možnosti pre jeden vrchol:



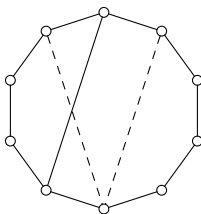
Petersenov graf nie je hamiltonovský



Petersenov graf nie je hamiltonovský



Petersenov graf nie je hamiltonovský



Petersenov graf nie je hamiltonovský

Úloha

Ukážte, že ak z Petersenovho grafu vynecháme niektorý vrchol, tak výsledný graf má hamiltonovskú kružnicu. (Zo starších úloh vieme, že vynechaním ľubovoľného vrchola dostaneme izomorfný graf.)

Aplikácia Oreho vety

Úloha

[K, Cvičenie 9.9] Dokážte, že ak graf na n vrchoch má viac ako $\binom{n-1}{2} + 1$ hrán, tak má hamiltonovskú kružnicu. Ukážte na príklade, že $\binom{n-1}{2} + 1$ hrán nestačí. (Hint: Možno pomôže Oreho veta.)

Čo vieme povedať o počte hrán, ak v grafe existujú nesusedné vrcholy také, že $\deg(u) + \deg(v) < n$?

Aplikácia Oreho vety

Čo vieme povedať o počte hrán, ak v grafe existujú nesusedné vrcholy také, že $\deg(u) + \deg(v) < n$?

$$\begin{aligned}
 m &< \binom{n-2}{2} + n \\
 &= \frac{(n-2)(n-3)}{2} + n \\
 &= \frac{(n-2)(n-3)}{2} + (n-2) + 2 \\
 &= \frac{(n-2)(n-1)}{2} + 2 \\
 &= \binom{n-1}{2} + 2
 \end{aligned}$$



Martin Knor.

Kombinatorika a Teória Grafov I.

Univerzita Komenského, Bratislava, 2000.