

Kombinatorické princípy

$$\sum_{j=k}^n \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1} \quad (1)$$

Úloha 1. Ukážte, že rovnosť

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad (2)$$

sa dá dostať ako špeciálny prípad hokejkovej identity (1).

Úloha 2. [E, 5.E15] Ukážte, že počet usporiadaných trojíc (x, y, z) takých, že $x, y, z \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ a $z > \max\{x, y\}$ sa dá dvoma spôsobmi vyjadriť ako

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \binom{n+1}{2} + 2\binom{n+1}{3}.$$

Poznáte nejaké iné vyjadrenia pre súčet prvých n druhých mocnín? Zhoduje sa výsledok s tým, čo vyšlo tu?

Úloha 3. Vedeli by ste dostať nejaké vyjadrenie pre $\sum_{k=1}^n k^2$ využitím rovností $k^2 = 2\binom{k}{2} + k$ resp. $k^2 = 2\binom{k+1}{2} - k$?

Úloha 4. Vedeli by ste dostať nejaké vyjadrenie pre $\sum_{k=1}^n k^2$ využitím $k^2 = \binom{k}{2} + \binom{k-1}{2}$?

Úloha 5. Zdôvodnite, že $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. (Pre všetky prípustné hodnoty k a n .)

Úloha 6. Koľko je štvorciferných čísel, kde všetky cifry sú párne?
Koľko z nich je deliteľných štyrmi?

Úloha 7. Koľko sa dá zostaviť 5-ciferných kódov používajúcich číslice $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ takých, kde práve n cifier je nepárnych.

Úloha 8. Koľkými spôsobmi môžeme položiť tri

- a) rovnaké
- b) rôzne

šachové figúrky na štandardnú šachovnicu 8×8 , ak sa žiadne z nich nesmú nachádzať v tom istom riadku ani v tom istom stĺpci.

Úloha 9. Dvanásť študentov sa pripravuje na štátnice a chcú sa rozdeliť na tri skupiny: Dvaja vypracujú otázky z kombinatoriky, piati vypracujú otázky z matematickej analýzy, piati vypracujú otázky z lineárnej algebry. Koľkými spôsobmi sa môžu rozdeliť?

Úloha 10. Koľkými spôsobmi je možné vybrať 11-členný futbalový tím a 5-členný basketbalový tím z 30-tich študentov, ak

- a) Nikto nebude v oboch tímoch.
- b) Lubovoľný počet študentov môže byť v oboch tímoch.
- c) Najviac jeden študent bude v oboch tímoch.

Úloha 11. Senát pozostáva zo 100 senátorov z 50-tich štátov, každý štát je reprezentovaný dvomi senátormi. Koľkými spôsobmi je možné zvoliť štvorčlenný výbor keď požadujeme, aby vo výbore neboli dvaja senátori z toho istého štátu?

Úloha 12. Chceme vybrať 6 členov disciplinárnej komisie spomedzi štyroch študentov a ôsmich učiteľov. Koľkými spôsobmi sa to dá urobiť, ak v komisii musia byť aspoň traja študenti?

Úloha 13. Desať študentov sedí v jednom rade. Pretože Harry a Hermiona neustále vyrušovali, nesmú sedieť vedľa seba. Koľkými spôsobmi sa vedia študenti usadiť?

Aký počet možností dostanem, ak mám troch študentov, z ktorých žiadni dvaja nesmú sedieť vedľa seba?

Úloha 14. Máme štandardný balíček 52 kariet (t.j. $\{A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K\} \times \{\clubsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \heartsuit\}$). Koľkými spôsobmi sa dá vybrať 10 kariet tak, aby sme všetky karty mali rôznej hodnoty. (T.j. nevyskytnú sa dve esá, dve dvojky, atď.)

Úloha 15. Kombinatorickou úvahou dokažte:

$$\binom{n}{k} - \binom{n-3}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-3}{k-1}.$$

(Návod: Pozerajte sa na podmnožiny vhodnej množiny, ktoré obsahuje tri zvolené prvky.)

Úloha 16. Kombinatorickou úvahou dokažte:

$$\binom{n}{2}m + \binom{m}{2}n = \binom{m+n}{3} - \binom{m}{3} - \binom{n}{3}.$$

(Hint: Môžete sa pozerať na výber trojčlennej komisie spomedzi m mužov a n žien.)

Úloha 17. Overte výpočtom aj kombinatorickou úvahou rovnosť:

$$\binom{2n}{n} = 2 \binom{2n-1}{n-1}.$$

Literatúra

[E] Arthur Engel. *Problem Solving Strategies*. Springer, New York, 1998. Problem Books in Mathematics.

Počítanie možností

Úloha 1. Koľko je celočíselných riešení rovnice $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 31$ takých, že $x_i \geq i$ pre $i = 1, 2, \dots, 5$.

Úloha 2. Koľko existuje celočíselných riešení rovnice $2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 12$ takých, že $x_i \in \mathbb{N}_0$? (Hint: Môže pomôcť zamyslieť sa nad paritou čísel x_3 a x_4 .)

Úloha 3. Zdôvodnite, že pre každé $k \in \mathbb{N}_0$ je $\frac{(3k)!}{6^k}$ celé číslo, t.j. $6^k \mid (3k)!$.

Úloha 4. Ukážte, že počet možností ako vybrať k -prvkovú podmnožinu z $\{1, 2, \dots, n\}$ tak, že nebude obsahovať susedné čísla, je práve $\binom{n-k+1}{k}$. (Hint 1: Chceme vlastne čísla $a_1, \dots, a_k$ také, že $a_1 < a_2 - 1$, $a_2 < a_3 - 1$, atď. Hint 2: Dá sa úloha previesť nejakou vhodne na počítanie riešení $x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1} = n$ s nejakými vhodnými obmedzeniami. Hint 3: Ak máte nápad na nejaké celkom iné riešenie, nedajte sa pomýliť možnosťami naznačenými v predošlých dvoch hintoch.)

Binomické koeficienty

Úloha 5. Nech A, B sú štvorcové matice rovnakej veľkosti a nad tým istým poľom.

a) Platí pre matice binomická veta v tvare

$$(I + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B^k,$$

pričom (ako obvykle) berieme $B^0 = I$?

b) Platí pre matice aj takáto podoba binomickej vety?

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

c) Vedeli by ste prísť aspoň na nejaké postačujúce podmienky, kedy pre matice funguje binomická veta?

Úloha 6. Vedeli by ste kombinatorickou úvahou zdôvodniť, že počet podmnožín n -prvkovej množiny, ktoré majú párny počet prvkov, je taký istý, ako počet podmnožín s nepárny počet prvkov? Viete napríklad dostať nejakú bijekciu medzi množinou všetkých párnych podmnožín a množinou všetkých nepárnych podmnožín?

Úloha 7. Čo sa stane, ak do binomickej vety dosadíme $t = \pm i$? Vedeli by ste na základe toho odvodiť identitu, ak sčítujeme v riadku Pascalovho trojuholníka každý štvrtý binomický koeficient?

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{4k} = \frac{2^n + (1+i)^n + (1-i)^n}{4} = \frac{2^{n-1} + 2^{n/2} \cos \frac{n\pi}{4}}{2}$$

Úloha 8. Označme $\omega = \frac{1-\sqrt{3}i}{2} = e^{2\pi i/3}$, t.j. komplexné riešenie rovnice $x^3 = 1$. Ukážte, že

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{3k} = \frac{2^n + (1+\omega)^n + (1+\omega^2)^n}{3} = \frac{2^n + 2 \cos \frac{n\pi}{3}}{3}$$

Úloha 9. Vedeli by ste fakt, že výrazy

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n (n-k) \binom{n}{n-k}$$

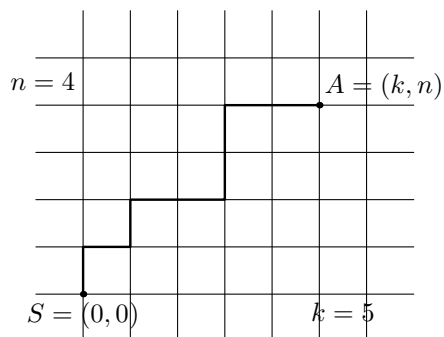
predstavujú tú istú sumu použiť na odvodenie rovnosti $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$?

Úloha 10. Rovnosť z predošlej úlohy sa dá ekvivalentne prepísať ako

$$\frac{\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}}{2^n} = \frac{n}{2}$$

a v takejto podobe ju môžeme interpretovať ako: Priemerná veľkosť podmnožiny $\{1, 2, \dots, n\}$ je $\frac{n}{2}$. Dá sa aj takýto pohľad použiť na dôkaz tejto rovnosti? (Aj keď sa dá povedať, že to je skoro veľmi podobné na argument naznačený v predošlej úlohe.)

Úloha 11. Aký je počet ciest po mriežke z bodu $(0, 0)$ do (k, n) takých, že v každom kroku sa posunieme doprava alebo nahor (t.j. každý krok je tvaru $(i, j) \rightarrow (i + 1, j)$ alebo $(i, j) \rightarrow (i, j + 1)$)? Príklad povolenej cesty je na obrázku 1.



Obr. 1: Príklad cesty v mriežke

Binomické koeficienty

Ukážeme na prednáške:

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}. \quad (1)$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} \quad (2)$$

Úloha 1. Nech $n \in \mathbb{N}_0$. Zistite, pre ktoré $k \in \mathbb{Z}$ platí nerovnosť $\binom{n}{k} < \binom{n}{k+1}$ a pre ktoré k platí obrátená nerovnosť.

Úloha 2. Ukážte, že pre $n, k \in \mathbb{Z}$ také, že $0 \leq k \leq n$ platí $\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1} \binom{n}{k}$. Dá sa táto rovnosť použiť na riešenie úlohy 1?

Úloha 3. Dokážte, že pre $n, k, l \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\binom{n}{k} \binom{k}{l} = \binom{n}{l} \binom{n-l}{k-l}.$$

Úloha 4. Vedeli by ste nájsť nejakú kombinatorickú interpretáciu, ktorou sa dá odvodiť nasledujúca rovnosť? Alebo by ste ju vedeli s použitím niektorej identity z tejto časti previesť na inú známu sumu?

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}$$

Úloha 5. Dokážte, že pre $n \in \mathbb{N}_0$ platí:

$$\sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ je párne}}} k \binom{n}{k} = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ je nepárne}}} k \binom{n}{k} = n 2^{n-2}$$

Úloha 6. Dokážte rovnosť

$$\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} = n(n+1) 2^{n-2}.$$

Úloha 7. Dokážte rovnosť

$$\sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1) 2^{n-2}.$$

Úloha 8. Dá sa výraz $\frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$ upraviť nejakým spôsobom, ktorý by nám pomohol pri vyjadrení sumy $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$?

Úloha 9. Dokážte, že pre $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Princíp zapojenia a vypojenia

Tieto úlohy sú sčasti zamerané na princíp zapojenia a vypojenia a sčasti na niektoré pojmy, ktoré sme stretli v kapitole o PIE (napríklad permutácie bez pevného bodu, Eulerova funkcia).

Ak D_n označuje počet permutácií bez pevného bodu, tak platí:

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}) \quad (1)$$

$$D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} = n! \left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right) \quad (2)$$

Eulerova funkcia:

$$\varphi(n) = |\{k \in \mathbb{N}; 1 \leq k \leq n, \gcd(k, n) = 1\}|$$

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p} \right)$$

$$\varphi(n) = \prod_{j=1}^k (p_j^{a_j} - p_j^{a_j-1}) = \prod_{j=1}^k p_j^{a_j-1} (p_j - 1)$$

Počet celočíselných riešení rovnice $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ vyhovujúcim podmienke $x_i \geq 0$ je práve $\binom{n+k-1}{k-1}$ a pri podmienke $x_i \geq 1$ dostaneme presne $\binom{n-1}{k-1}$ riešení.

Úloha 1. Ukážte, že

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n, \quad (3)$$

platí pre všetky $n \in \mathbb{N}$.

Úloha 2. Ukážte rovnosť (2) matematickou indukciou a použitím (3). (T.j. bez použitia princípu zapojenia a vypojenia.)

Úloha 3. Uvažujme permutácie množiny $\{1, 2, \dots, n\}$. Ako sa dá vyjadriť počet permutácií, ktoré majú práve k pevných bodov?

Úloha 4. Ukážte, že pre $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} D_k.$$

Úloha 5. Ukážte, že pre ľubovoľné $n \in \mathbb{N}_0$ platí $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$. (Hint: Môže pomôcť skúsiť nejako rátať, koľko je takých $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, pre ktoré $\gcd(k, n) = d$.)

Úloha 6. Ukážte, že pre $n > 2$ je $\varphi(n)$ párne číslo.

Úloha 7. Koľko existuje riešení rovnice

$$x_1 + x_2 + x_3 = 15$$

v nezáporných celých čísla takých, že $x_1 \leq 3$, $x_2 \leq 6$, $x_3 \leq 12$?

Úloha 8. [R, Example 8.6.1] Aký je počet celočíselných riešení rovnice

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11$$

takých, že platí $0 \leq x_1 \leq 3$, $0 \leq x_2 \leq 4$ a $0 \leq x_3 \leq 6$?

Úloha 9. Koľko existuje štvoríc celých čísel takých, že platí

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 32$$

a súčasne $0 \leq x_i \leq 10$.

Úloha 10. [B, 2.21] Koľko existuje celočíselných riešení rovnice $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17$ takých, že $1 \leq x_1 \leq 3$, $2 \leq x_2 \leq 4$, $3 \leq x_3 \leq 5$, $4 \leq x_4 \leq 6$?

Úloha 11. Koľko existuje celočíselných riešení rovnice

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$$

takých, že $2 \leq x_1 \leq 4$, $3 \leq x_2 \leq 6$, $4 \leq x_3 \leq 6$, $x_4 \geq 2$.

Úloha 12. Koľko prirodzených čísel $n \leq 1000$ je deliteľných dvojkou alebo sedmičkou?

Úloha 13. [B, 2.44] Koľko existuje prirodzených čísel bez štvorcov, ktoré nepresahujú 100? (Prirodzené číslo n je číslo bez štvorcov, ak pre $k \in \mathbb{N}$ z $k^2 \mid n$ vyplýva $k = 1$. Inak povedané, nie je deliteľné žiadnou netriviálnou druhou mocninou.)

Hint: Pomôže zamyslieť sa nad tým, ako môže vyzeráť prvočíselný rozklad čísla bez štvorcov.

Úloha 14. Koľko existuje celočíselných riešení rovnice $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 26$ takých, že $2 \leq x_i \leq 7$ pre $i = 1, 2, 3, 4$?

Úloha 15. Koľko existuje celočíselných riešení rovnice

$$x_1 + x_2 + x_3 = 18$$

v nezáporných celých číslach takých, že $0 \leq x_1 \leq 6$, $4 \leq x_2 \leq 9$, $7 \leq x_3 \leq 14$.

Úloha 16. [K, Cvicenie 4.9] Dvaja učitelia skúšajú súčasne skupinu 4 študentov, každý jeden predmet. Každý študent odpovedá z jedného predmetu 30 minút. Koľko existuje rozvrhov skúšania, ak požadujeme, aby skúšky skončili za dve hodiny?

Úloha 17. Uvažujme riešenia rovnice $x_1 + x_2 + x_3 = 48$ v nezáporných celých číslach

a) Koľko existuje riešení takých, kde všetky tri čísla x_1, x_2, x_3 sú rôzne?

b) Koľko existuje riešení takých, že $x_1 < x_2 < x_3$?

Úloha 18. Koľkými spôsobmi sa dajú permutovať písmená slova KOMBINATORIKA tak, aby sa neopakovali dve písmená po sebe.

Úloha 19. [K, Cvicenie 4.9], [HKŠ, Example 1.6.3(iii)] Koľko šesťpísmenkových slov možno zostaviť z písmen slova TIKTAK, ak dve rovnaké písmená nesmú nasledovať bezprostredne za sebou.

Úloha 20. [K, Cvicenie 4.10], [HKŠ, Exercise 6.6(iii)], [M, Example 4.4(a)], [V, Problem 214] Koľkými spôsobmi možno do radu usadiť troch Angličanov, troch Francúzov, troch Talianov tak, aby žiadni traja krajanovia nesadeli vedľa seba.

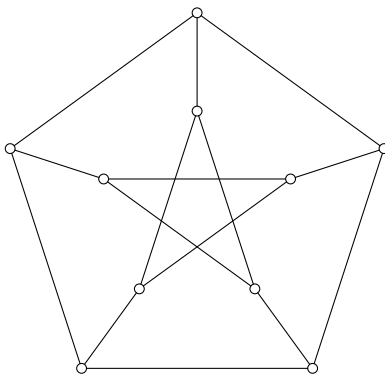
Úloha 21. [HKŠ, Exercise 6.3(iv)] Koľkými spôsobmi sa dá uložiť n veží na šachovnicu $n \times n$ tak, aby každé políčko bolo obsadené alebo ohrozené niektorou z nich? (Odpoveď: $2n^n - n!$.)

Literatúra

- [B] V. K. Balakrishnan. *Schaum's Outline of Theory and Problems of Combinatorics including concepts of Graph Theory*. McGraw-Hill, New York, 1995.
- [HKŠ] Jiří Herman, Radan Kučera, and Jaromír Šimša. *Counting and Configurations: Problems in Combinatorics, Arithmetic, and Geometry*. Springer, New York, 2003. CMS Books in Mathematics.
- [K] Martin Knor. *Kombinatorika a Teória Grafov I*. Univerzita Komenského, Bratislava, 2000.
- [M] Pavle Mladenović. *Combinatorics: A Problem-Based Approach*. Springer Nature Switzerland AG, Cham, 2019.
- [R] Kenneth H. Rosen. *Discrete Mathematics and Its Applications*. McGraw-Hill, New York, 7th edition, 2012.
- [V] N. Ya. Vilenkin. *Combinatorics*. Academic Press, New York, 1971.

1 Základné pojmy, súvislosť, stromy

Úloha 1.1. Dokážte: Pre ľubovoľné 2 vrcholy u, v Petersenovho grafu existuje automorfizmus f Petersenovho grafu taký, že $f(u) = v$. (Názov *automorfizmus* znamená izomorfizmus grafu G s tým istým grafom G .)



Obr. 1: Petersenov graf

Úloha 1.2. Definujme graf G nasledovne. Nech $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Množinu vrcholov V budú tvoriť všetky dvojprvkové podmnožiny množiny M . Dva vrcholy $A, B \subseteq M$ budú spojené hranou ak $A \cap B = \emptyset$. Dokážte, že je to vlastne Petersenov graf (teda že je izomorfný s Petersenovým grafom). Vedeli by ste použiť tento popis na dôkaz toho, že

- a) pre ľubovoľné 2 vrcholy u a v existuje automorfizmus Petersenovho grafu taký, že $f(u) = v$,
- b) pre ľubovoľné 2 dvojice susedných vrcholov (u, v) a (u', v') existuje automorfizmus Petersenovho grafu také, že $f(u) = u'$ a $f(v) = v'$,
- c) pre ľubovoľné 2 dvojice nesusedných vrcholov (u, v) a (u', v') existuje automorfizmus Petersenovho grafu také, že $f(u) = u'$ a $f(v) = v'$.

Úloha 1.3. Dokážte: V každom grafe, ktorý má aspoň dva vrcholy, existujú dva (rôzne) vrcholy, ktoré majú rovnaký stupeň.

Úloha 1.4. Nech $G = (V, E)$ je graf. Pre ľubovoľné dva vrcholy u, v grafu G definujme reláciu $\sim$ na množine V tak, že $u \sim v$ práve vtedy, keď existuje cesta z u do v . Ukážte, že táto relácia je relácia ekvivalencie na množine V . Triedy ekvivalencie $\sim$ nazývame *komponenty súvislosti* grafu G .

Úloha 1.5. Nech $G = (V, E)$ je ľubovoľný graf a C je niektorý jeho komponent súvislosti. Ukážte, že indukovaný podgraf na množine C je súvislý.

Úloha 1.6. Ukážte, že pre každý vrchol u grafu G je jeho komponent súvislosti rovný najväčšiemu indukovanému podgrafu obsahujúcemu vrchol u .

Úloha 1.7. Dokážte: Súvislý graf na n vrchoch má aspoň $n - 1$ hrán.

Úloha 1.8. Ukážte, že každý strom je minimálny súvislý graf, t.j. vynechaním ľubovoľného vrcholu vznikne nesúvislý graf. (Hint: Dá sa použiť tvrdenie o tom že pridanie či vynechanie vrchola stupňa 1 neovplyvní to, že daný graf je strom.)

Úloha 1.9. Ukážte, že ak T je strom, tak pre ľubovoľné dva vrcholy $x, y \in V(T)$ existuje práve jedna cesta z x do y . (Hint: Dá sa použiť tvrdenie o tom že pridanie či vynechanie vrchola stupňa 1 neovplyvní to, že daný graf je strom.)

Úloha 1.10. Dokážte: Graf $G = (V, E)$ je súvislý práve vtedy, keď pre každý rozklad množiny vrcholov $V = V_1 \cup V_2$ na dve neprázdne disjunktné množiny existuje hrana spájajúca nejaký vrchol z V_1 s nejakým vrcholom z V_2 .

Úloha 1.11. Dokážte, že ak graf na n vrchoch má aspoň $\binom{n-1}{2} + 1$ hrán, tak je súvislý. Ukážte na príklade, že $\binom{n-1}{2}$ hrán nestačí.

Úloha 1.12. Nech P_1 a P_2 sú dve cesty maximálnej možnej dĺžky v súvislom grafe G . Dokážte, že P_1 a P_2 majú spoločný vrchol. Musia mať spoločnú hranu?

2 Rovinné grafy

Eulerova formula

$$v - h + s = 2 \quad (1)$$

Nerovnosti pre ľubovoľný planárny graf resp. pre ľubovoľný planárny graf bez kružníc dĺžky 3 (za predpokladu $v \geq 3$):

$$h \leq 3v - 6$$

$$h \leq 2v - 4$$

Grafy K_5 ani $K_{3,3}$ nie sú planárne.

Každý rovinný graf obsahuje vrchol stupňa ≤ 5 .

Úloha 2.1. Ukážte, že každý planárny graf obsahuje vrchol stupňa nanajvýš 5.

Úloha 2.2. Ukážte, že ak G je planárny graf, tak aj každý jeho podgraf je planárny.

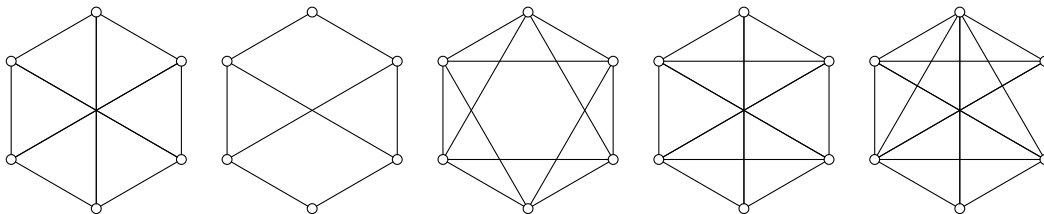
Úloha 2.3. Ukážte, že pre $n \leq 4$ sú všetky grafy na n vrchoch planárne.

Úloha 2.4. Ukážte, že graf G (nie nutne súvislý) platí rovnosť $v - h + s = 1 + c$, kde c označuje počet komponentov súvislosti.

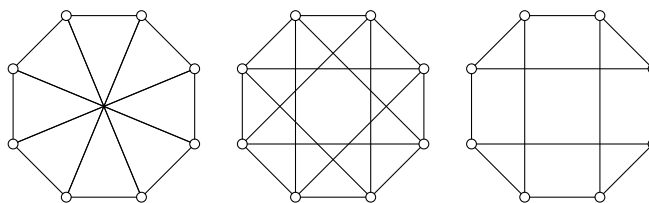
Úloha 2.5. Ukážte, že pre ľubovoľné (nie nutne súvislý) graf G platí nerovnosť $h \leq 3v - 6$. Dá sa odvodiť o čosi silnejšia nerovnosť, v ktorej bude vystupovať aj počet komponentov súvislosti grafu G ?

Úloha 2.6. Nech G je graf na n vrchoch a $n \geq 11$. Dokážte, že potom graf G alebo jeho komplement nie je planárny.

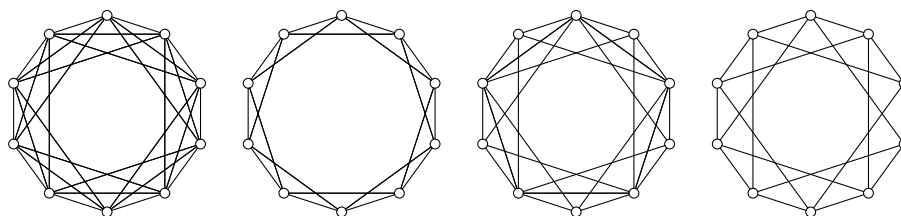
Úloha 2.7. Ktoré z nasledujúcich grafov sú rovinné? Zdôvodnite!



Úloha 2.8. Ktoré z nasledujúcich grafov sú rovinné? Zdôvodnite!



Úloha 2.9. Ktoré z nasledujúcich grafov sú rovinné?



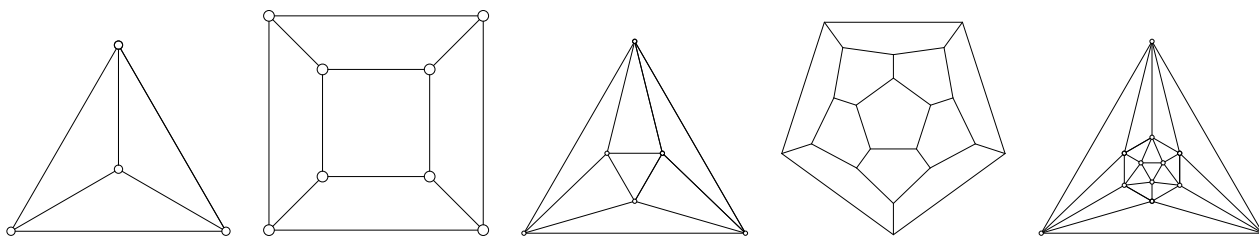
Farbenie grafov a bipartitné grafy

Úloha 1. Nájdite ofarbenie vrcholov Petersenovho grafu tromi farbami. Dá sa Petersenov graf ofarbiť dvoma farbami?

Eulerovské grafy

Úloha 2. Ukážte, že súvislý graf v ktorom všetky vrcholy majú párny stupeň má eulerovský ťah. (Hint: Uvažujte najdlhší možný ťah v našom grafe. Dá sa ukázať, že musí končiť v rovnakom vrchole, kde začal? Dá sa ukázať, že obsahuje všetky hrany?)

Úloha 3. Platí charakterizácia grafov s eulerovským ťahom aj ak povolíme slučky a násobné hrany?



Obr. 1: Grafy zodpovedajúce platónskym telesám

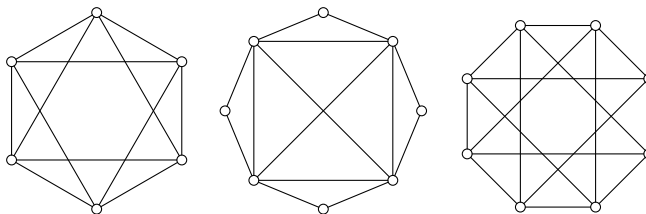
Úloha 4. Ukážte, že charakterizácia eulerovských grafov (ako súvislých grafov, kde každý vrchol má párny stupeň) platí aj ak v grafoch povolíme slučky a násobné hrany.

Úloha 5. Ktoré z grafov zodpovedajúcich platónskym telesám majú uzavretý eulerovský ťah (obr. 1)?

Úloha 6. Pre ktoré n má graf K_n uzavretý eulerovský ťah?

Pre ktoré m, n má graf $K_{m,n}$ uzavretý eulerovský ťah?

Úloha 7. Majú dané grafy (uzavretý) eulerovský ťah? Ak áno, nájdite aspoň jeden.



Hamiltonovské grafy

Ak graf G má hamiltonovskú kružnicu, tak pre počet komponentov po vynechaní neprázdnej množiny vrcholov platí $c(G - S) \leq |S|$.

Ak párny graf má hamiltonovskú kružnicu, tak platí $|V_1| = |V_2|$.

- Ore: Nech G je graf na $n \geq 3$ vrcholoch. Ak súčet stupňov ľubovoľných dvoch vrcholov, ktoré nie sú spojené hranou, je aspoň n , tak G má hamiltonovskú kružnicu.
- Dirac: Ak v grafe na n vrcholoch má každý vrchol stupeň aspoň $\frac{n}{2}$, tak G má hamiltonovskú kružnicu.

- Bondy a Chvátal: Nech u, v sú nejaké nesusedné vrcholy grafu G také, že

$$\deg(u) + \deg(v) \geq n.$$

Potom $G + uv$ má hamiltonovskú kružnicu práve vtedy, keď G' má hamiltonovskú kružnicu.

Úloha 8. Nájdite hamiltonovské kružnice pre grafy zodpovedajúce platónskym telesám (obr. 1).

Úloha 9. Ukážte, že graf $K_{m,n}$ má hamiltonovskú kružnicu práve vtedy, keď $m = n \geq 2$.

Úloha 10. [K, Cvičenie 9.9] Dokážte, že ak graf na n vrchoch má viac ako $\binom{n-1}{2} + 1$ hrán, tak má hamiltonovskú kružnicu. Ukážte na príklade, že $\binom{n-1}{2} + 1$ hrán nestačí. (Hint: Možno pomôže Oreho veta.)

Úloha 11. Ukážte, že ak z Petersenovho grafu vynecháme niektorý vrchol, tak výsledný graf má hamiltonovskú kružnicu. (Zo starších úloh vieme, že vynechaním ľubovoľného vrchola dostaneme izomorfný graf.)

Literatúra

- [K] Martin Knor. *Kombinatorika a Teória Grafov I*. Univerzita Komenského, Bratislava, 2000.

Fibonacciho čísla

$F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n. \quad (1)$$

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\varphi - \psi} = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Číslo F_{n+1} vyjadruje:

- Počet dláždení mriežky rozmerov $1 \times n$ dlaždicami veľkostí 1×1 a 1×2 .
- Počet vyjadrení čísla n ako súčtu jednotiek a dvojok.
- Chceme prejsť n schodov tak, že každým krokom stúpame o jeden alebo o dva schody vyššie. Koľko je možností, ako sa to dá urobiť?

Úloha 1 (Cassiniho identita).

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n \quad (4)$$

Úloha 2. Pre ľubovoľné $m, n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$F_{m+n} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n \quad (5)$$

Z toho dostaneme:

$$F_{2n} = F_n(F_{n+1} + F_{n-1}) \quad (6)$$

$$F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2 \quad (7)$$

Úloha 3. Ukážte, že platí

$$\sum_{k=0}^n F_k = F_{n+2} - 1 \quad (8)$$

Úloha 4. Ukážte, že platí

$$F_{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n-k}{k} \quad (9)$$

Úloha 5. Ukážte, že platí:

$$\sum_{k=0}^n F_{2k} = F_{2n+1} - 1$$

$$\sum_{k=0}^n F_{2k+1} = F_{2n+2}$$

Úloha 6. Dokážte, že pre $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\sum_{k=0}^n F_k^2 = F_n F_{n+1}.$$

Úloha 7. Ukážte, že pre každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$F_{2n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k.$$

Lineárne rekurencie

$$A_n = c_{k-1}A_{n-1} + c_{k-2}A_{n-2} + \cdots + c_1A_{n-k+1} + c_0A_{n-k} \quad (10)$$

Charakteristická rovnica:

$$x^k = c_{k-1}x^{k-1} + c_{k-2}x^{k-2} + \cdots + c_1x + c_0 \quad (11)$$

Veta 8. *Uvažujme rekurenciu (10) a predpokladajme navyše, že charakteristická rovnica $x^k = c_{k-1}x^{k-1} + c_{k-2}x^{k-2} + \cdots + c_1x + c_0$ nemá násobné korene. Označme korene tejto rovnice v $\mathbb{C}$ ako $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k$.*

Potom pre každé riešenie (A_n) rekurencie (10) existujú koeficienty $d_0, d_1, \dots, d_k$ tak, že

$$A_n = d_0\alpha_0^n + d_1\alpha_1^n + \cdots + d_k\alpha_k^n.$$

Inak povedané, postupnosti $(\alpha_i^n)_{n=0}^\infty$ pre $i = 0, 1, \dots, k$ tvoria bázu priestoru postupností vyhovujúcich rekurencii (10).

Veta 9. *Uvažujme rekurenciu (10). Nech α je s -násobný koreň je charakteristickej rovnice. Potom:*

a) Postupnosti $\alpha^n, n\alpha^n, n^2\alpha^n, \dots, n^{s-1}\alpha^n$ vyhovujú rekurencii (10).

b) Ak pre každý koreň zoberieme postupnosti takéhoto tvaru, tak spolu dostaneme bázu priestoru všetkých postupností spĺňajúcich (10).