

D.Ú.-sada 5

1. Ak (a_n) je postupnosť prirodzených čísel a $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = a$ (kde a je pevne zvolené reálne číslo), tak pre množinu $A = \{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ platí $d(A) = \frac{1}{a}$.
2. Označme ako T_α (kde $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$) systém všetkých podmnožín množiny $\mathbb{N}$ takých, že $d(A) = \alpha$. Ukážte, že množina T_α je nespočítateľná.
3. Nech $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}] = \{a + bi\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Z}\}$. Dokážte, že $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ s normou $N(a + bi\sqrt{2}) = a^2 + 2b^2$ je Euklidovský okruh.
4. Označme $H = \{\frac{x}{y}; (x, y, z) \text{ je pytagorovská trojica}\}$. Dokážte, že množina H je hustá v intervale $\langle 0, +\infty \rangle$.