

Zadaná 25. septembra 2025. Termín odovzdania: do prednášky **2. októbra 2025**.

Úloha 1. Zdôvodnite, že ak máme zadané úsečky dĺžok x a y , tak pomocou pravítka a kružidla vieme skonštruovať aj úsečku dĺžky $\sqrt{xy}$.

Zadaná 2. októbra 2025. Termín odovzdania: do prednášky **9. októbra 2025**.

Úloha 1. Rozhodnite, či dané tvrdenie platí. Ak áno, dokážte ho. Ak nie, nájdite **konkrétny** kontrapríklad.

a) Nech $f: X \rightarrow Y$ a $g: Y \rightarrow Z$ sú zobrazenia. Ak $g \circ f$ je injektívne, tak aj g je injektívne.

b) Nech $f: X \rightarrow Y$ a $g: Y \rightarrow Z$ sú zobrazenia. Ak $g \circ f$ je injektívne, tak aj f je injektívne.

Zadaná 9. októbra 2025. Termín odovzdania: do prednášky **16. októbra 2025**.

Úloha 1. Rozhodnite, či takéto tvrdenie platí. Ak áno, tak ho dokážte. Ak nie, tak nájdite kontrapríklad.

Ak A , B sú ľubovoľné množiny, tak platí

$$|A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B|.$$

Drobné poznámky: Zdôrazním to, že by som chcel naozaj vidieť dôkaz, ktorý využíva takú definíciu súčtu kardinálnych čísel, akú sme videli na prednáške. Oplatí sa uvedomiť si, že teraz chceme pracujeme aj s *nekonečnými* množinami – rovnaký argument, aký ste videli v nižších ročníkoch pre konečné množiny možno nebude fungovať. (Čiže na takéto niečo si treba dať aspoň trochu pozor.)

Zadaná 16. októbra 2025. Termín odovzdania: do prednášky **23. októbra 2025**.

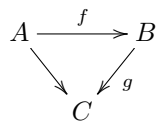
Úloha 1. Dokážte, nasledujúce tvrdenia – pričom je povolené používať len veci, ktoré už boli na prednáške. (Definície, vlastnosti rovnosti a nerovnosti, Cantor–Bernsteinova veta, ... T.j. skúsiť to bez použitia vecí, ktoré v texte dokázané sú napríklad o súčte kardinálnych čísel.) Vlastne celý tento dlhý pokec smeruje najmä k tomu, že by ste to mali skúsiť bez použitia výsledku, že platí: $|A| \geq \aleph_0 \Rightarrow |A| + \aleph_0 = |A|$. (Takýto fakt zanedlho dokážeme, keď sa začneme zaoberať vlastnosťami súčtu kardinálnych čísel.)

a) $|\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$;

b) $|\mathbb{N}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$

Zadaná 30. októbra 2025. Termín odovzdania: do prednášky **6. novembra 2025**.

Úloha 1. Nech A, B, C sú neprázdné množiny, a $f: A \rightarrow B$ je zobrazenie.



Potom môžeme definovať zobrazenie $\varphi: C^B \rightarrow C^A$ predpisom

$$\varphi(g) = g \circ f.$$

Dokážte, alebo nájdite kontrapríklad:

Ak f je injektívne, tak φ je injektívne.

Zadaná 30. októbra 2025. Termín odovzdania: do prednášky **13. novembra 2025**.

Interval na odovzdávanie som nechal dlhší – aby ste na ten istý termín nemuseli odovzdávať dve úlohy.

Vyberte si v prvej aj v druhej časti jednu z úloh a) až d). (T.j. ak budete odovzdávať túto úlohu, mali by ste vypočítať jeden kardinál z časti 1 a jeden kardinál z časti 2.)

-
- Úloha 1.** 1. Vypočítajte (t.j. zistite, či je daný kardinál rovný niektorému z čísel $\aleph_0$, $\mathfrak{c}$, $2^{\mathfrak{c}}$, $2^{2^{\mathfrak{c}}}$):
a) $\mathfrak{c}^{\aleph_0}$; b) $\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$; c) $\aleph_0^{\mathfrak{c}}$; d) $\mathfrak{c} \cdot \aleph_0$
2. Vypočítajte (t.j. zistite, či je daný kardinál rovný niektorému z čísel $\aleph_0$, $\mathfrak{c}$, $2^{\mathfrak{c}}$, $2^{2^{\mathfrak{c}}}$):
a) $(2^{\mathfrak{c}})^{\aleph_0}$; b) $\aleph_0^{2^{\mathfrak{c}}}$; c) $2^{\mathfrak{c}} \cdot 2^{2^{\mathfrak{c}}}$; d) $(2^{\mathfrak{c}})^{\mathfrak{c}}$

Poznámka: Môžu sa používať všetky nerovnosti a rovnosti, o ktorých sme dokázali, že platia pre všetky kardinály (alebo dôkaz je v texte k prednáške a z nejakého dôvodu sme ho preskočili) a tiež platnosť rovností $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ a $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$. (Inak povedané: Tie veci čo sú v prehľade na stránke predmetu – v súbore [prehľad.pdf](https://msleziak.com/vyuka/2025/vpa/prehľad.pdf)¹ s výnimkou rovnosti $a + b = a \cdot b = \max\{a, b\}$, ktorej platnosť pre nekonečné kardinály sme iba spomenuli bez dôkazu.) Ak budete pri výpočtoch potrebovať nejaké ďalšie pomocné výsledky o kardináloch, treba uviesť aj ich dôkaz.

Ak je použitý zápis $a^{b^{\mathfrak{c}}}$, myslí sa tým $a^{(b^{\mathfrak{c}})}$ a nie $(a^b)^{\mathfrak{c}}$. (Čo je asi vcelku prirodzené, lebo $(a^b)^{\mathfrak{c}}$ by sme mohli prepísať ako $a^{b^{\mathfrak{c}}}$; ale pre istotu som to zdôraznil.)

¹<https://msleziak.com/vyuka/2025/vpa/prehľad.pdf>

Zadaná 6. novembra 2025. Termín odovzdania: do prednášky **20. novembra 2025**.

Vyberte si v prvej aj v druhej časti jednu z úloh a) až d). (T.j. ak budete odovzdávať túto úlohu, mali by ste vypočítat jeden kardinál z časti 1 a jeden kardinál z časti 2.)

Úloha 1. 1. Nájdite kardinalitu danej množiny:

a) $\mathbb{C} \times \mathbb{Q}$; b) $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$; c) $\mathbb{R} \times \mathbb{N}$; d) $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$;

2. Nájdite kardinalitu danej množiny:

a) $\mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}$; b) $\mathbb{Q}^{\mathbb{R}}$; c) $\mathbb{R}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$; d) $\mathbb{C}^{\mathbb{Q}}$;

Poznámka: Môžu sa používať všetky nerovnosti a rovnosti, o ktorých sme dokázali, že platia pre všetky kardinály (alebo dôkaz je v texte k prednáške a z nejakého dôvodu sme ho preskočili) a tiež platnosť rovností $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ a $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$. (Inak povedané: Tie veci čo sú v prehľade na stránke predmetu – v súbore [prehľad.pdf](https://msleziak.com/vyuka/2025/vpa/prehľad.pdf)¹ s výnimkou rovnosti $a + b = a \cdot b = \max\{a, b\}$, ktorej platnosť pre nekonečné kardinály sme iba spomenuli bez dôkazu.) Takisto môžete používať známe kardinality číselných množín: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$ a $|\mathbb{R}| = |\mathbb{C}| = \mathfrak{c}$. Ak budete pri výpočtoch potrebovať nejaké ďalšie pomocné výsledky o kardináloch, treba uviesť aj ich dôkaz.

Výsledok by mal byť upravený na niektoré z kardinálnych čísel $\aleph_0$, $\mathfrak{c}$, $2^{\mathfrak{c}}$, $2^{2^{\mathfrak{c}}}$.

¹<https://msleziak.com/vyuka/2025/vpa/prehľad.pdf>

Zadaná 13. novembra 2025. Termín odovzdania: do prednášky **27. novembra 2025**.

Vyberte si jednu zo štyroch úloh a) až d).

Úloha 1. Zistite, či uvedené tvrdenie platí pre ľubovoľné nekonečné kardinálne čísla a , b , c . Ak platí, tak ho dokážte. Ak nie uveďte kontrapríklad (a zdôvodnite, že je to skutočne kontrapríklad).

a) $a^b = a^c \Rightarrow b = c$

b) $b^a = c^a \Rightarrow b = c$

c) $a^b \leq a^c \Rightarrow b \leq c$

d) $b^a \leq c^a \Rightarrow b \leq c$

Poznámka: Môžu sa používať všetky nerovnosti a rovnosti, o ktorých sme dokázali, že platia pre všetky kardinály (alebo dôkaz je v texte k prednáške a z nejakého dôvodu sme ho preskočili) a tiež platnosť rovností $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ a $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$. (Inak povedané: Tie veci čo sú v prehľade na stránke predmetu – v súbore **prehlad.pdf**¹ s výnimkou rovnosti $a + b = a \cdot b = \max\{a, b\}$, ktorej platnosť pre nekonečné kardinály sme iba spomenuli bez dôkazu.) Takisto môžete používať známe kardinality číselných množín: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$ a $|\mathbb{R}| = |\mathbb{C}| = \mathfrak{c}$. Ak budete pri výpočtoch potrebovať nejaké ďalšie pomocné výsledky o kardináloch, treba uviesť aj ich dôkaz.

¹<https://msleziak.com/vyuka/2025/vpa/prehlad.pdf>

Zadaná 19. novembra 2025. Termín odovzdania: do prednášky **4. decembra 2025**.

Úloha 1. Dané množiny usporiadajte podľa kardinality. Svoje tvrdenia zdôvodnite! (T.j. očakáva sa napríklad odpoveď v tvare napríklad $|A| < |C| = |D| < |B|$ a zdôvodnenie všetkých uvedených nerovností a rovností.)

Množiny s ktorými pracujete sú: $A = \mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}$, $B = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $C = \mathbb{N}^{\mathbb{R}}$, D = množina všetkých spojitých zobrazení $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Poznámka: Môžu sa používať všetky nerovnosti a rovnosti, o ktorých sme dokázali, že platia pre všetky kardinály (alebo dôkaz je v texte k prednáške a z nejakého dôvodu sme ho preskočili) a tiež platnosť rovností $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ a $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$. (Inak povedané: Tie veci čo sú v prehľade na stránke predmetu – v súbore `prehlad.pdf`¹ s výnimkou rovnosti $a + b = a \cdot b = \max\{a, b\}$, ktorej platnosť pre nekonečné kardinály sme iba spomenuli bez dôkazu.) Takisto môžete používať známe kardinality číselných množín: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$ a $|\mathbb{R}| = |\mathbb{C}| = \mathfrak{c}$. A samozrejme aj to, čo sme na prednáške dokázali o kardinale množiny spojitých zobrazení. Ak budete pri výpočtoch potrebovať nejaké ďalšie pomocné výsledky o kardináloch, treba uviesť aj ich dôkaz.

¹<https://msleziak.com/vyuka/2025/vpa/prehlad.pdf>