

Zadaná 30. októbra 2025. Termín odovzdania: do prednášky **13. novembra 2025**.

Interval na odovzdávanie som nechal dlhší – aby ste na ten istý termín nemuseli odovzdávať dve úlohy.

Vyberte si v prvej aj v druhej časti jednu z úloh a) až d). (T.j. ak budete odovzdávať túto úlohu, mali by ste vypočítať jeden kardinál z časti 1 a jeden kardinál z časti 2.)

-
- Úloha 1.** 1. Vypočítajte (t.j. zistite, či je daný kardinál rovný niektorému z čísel $\aleph_0$, $\mathfrak{c}$, $2^{\mathfrak{c}}$, $2^{2^{\mathfrak{c}}}$):
a) $\mathfrak{c}^{\aleph_0}$; b) $\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$; c) $\aleph_0^{\mathfrak{c}}$; d) $\mathfrak{c} \cdot \aleph_0$
2. Vypočítajte (t.j. zistite, či je daný kardinál rovný niektorému z čísel $\aleph_0$, $\mathfrak{c}$, $2^{\mathfrak{c}}$, $2^{2^{\mathfrak{c}}}$):
a) $(2^{\mathfrak{c}})^{\aleph_0}$; b) $\aleph_0^{2^{\mathfrak{c}}}$; c) $2^{\mathfrak{c}} \cdot 2^{2^{\mathfrak{c}}}$; d) $(2^{\mathfrak{c}})^{\mathfrak{c}}$

Poznámka: Môžu sa používať všetky nerovnosti a rovnosti, o ktorých sme dokázali, že platia pre všetky kardinály (alebo dôkaz je v texte k prednáške a z nejakého dôvodu sme ho preskočili) a tiež platnosť rovností $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ a $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$. (Inak povedané: Tie veci čo sú v prehľade na stránke predmetu – v súbore [prehľad.pdf](https://msleziak.com/vyuka/2025/vpa/prehľad.pdf)¹ s výnimkou rovnosti $a + b = a \cdot b = \max\{a, b\}$, ktorej platnosť pre nekonečné kardinály sme iba spomenuli bez dôkazu.) Ak budete pri výpočtoch potrebovať nejaké ďalšie pomocné výsledky o kardináloch, treba uviesť aj ich dôkaz.

Ak je použitý zápis $a^{b^{\mathfrak{c}}}$, myslí sa tým $a^{(b^{\mathfrak{c}})}$ a nie $(a^b)^{\mathfrak{c}}$. (Čo je asi vcelku prirodzené, lebo $(a^b)^{\mathfrak{c}}$ by sme mohli prepísať ako $a^{b^{\mathfrak{c}}}$; ale pre istotu som to zdôraznil.)

¹<https://msleziak.com/vyuka/2025/vpa/prehľad.pdf>