

Skonštruovateľné čísla

12. decembra 2024

Konštrukcie pravítkom a kružidlom

Nemožnosť konštrukcií ako napríklad:

- ▶ konštrukcia $\sqrt[3]{2}$ (zdvojenie kocky)
- ▶ trisekcia uhla (napríklad $\cos \frac{\pi}{9}$)
- ▶ transendentné čísla – napríklad π , $\sqrt{\pi}$ (kvadratura kruhu)

Konštrukcie pravítkom a kružidlom

Konštrukciou pomocou pravítka a kružidla máme na mysli to, že ak sme už nejaké body zostrojili, tak v ďalšom kroku môžeme:

- ▶ Vytvoriť priamku určenú niektorými dvoma bodmi.
- ▶ Vytvoriť kružnicu, kde stred a polomer sú určené už zostrojenými bodmi.
- ▶ Pridať body, ktoré dostaneme, ako prienik niektorých takýchto priamok a kružníc.

Konštrukcie pravítkom a kružidlom

Definícia

Predpokladajme, že máme danú množinu bodov M , ktorá obsahuje body $(0,0)$ a $(0,1)$. Hovoríme, že P bod M je *skonštruovateľný pomocou bodov množiny M* , ak existuje konečná postupnosť krokov uvedeného typu, pomocou ktorej môžeme z bodov množiny M dostať bod P .

Reálne číslo x nazveme *skonštruovateľné z množiny M* , ak existuje skonštruovateľný bod $P = (x, y)$.

V prípade, že $M = \{(0,0), (0,1)\}$, tak hovoríme stručne o *skonštruovateľných* bodoch a číslach.

Konštrukcie pravítkom a kružidlom

Pre $x, y \in \mathbb{K}$ aj

- ▶ $\frac{x+y}{2}$, $x + y$, $x - y$ sú skonštruovateľné;
- ▶ xy je skonštruovateľné;
- ▶ Ak $x \neq 0$, tak aj $\frac{1}{x}$ je skonštruovateľné;
- ▶ $\sqrt{xy}$ je skonštruovateľné.

Konštrukcie pravítkom a kružidlom

Tvrdenie

Množina $\mathbb{K}$ všetkých skonštruovateľných čísel je pole. Platí $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$, je to teda rozšírenie poľa racionálnych čísel.

Pridávame odmocniny

$$\frac{y - a_2}{x - a_1} = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$$
$$\frac{y - c_2}{x - c_1} = \frac{d_2 - c_2}{d_1 - c_1}$$

$$x, y \in F$$

Pridávame odmocniny

$$\begin{aligned}(x - a)^2 + (y - b)^2 &= r^2, \\ sx + ty &= u\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x - a)^2 + (y - b)^2 &= r^2, \\ (x - c)^2 + (y - d)^2 &= s^2.\end{aligned}$$

Pridávame odmocniny

$$x_{1,2} = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

$$F(x_1) = F(x_2) = F(\sqrt{D})$$

Stupeň algebraického prvku

Veta

Ak číslo u je konštruovateľné, tak u je algebraické číslo a stupeň $[u : \mathbb{Q}]$ je mocnina dvojky.

$$[u : \mathbb{Q}] = 2^n$$

Indukčný krok:

$$[F(u) : F] = [u : F] \in \{1, 2\}$$

$$[F(u) : \mathbb{Q}] = [F(u) : F] \cdot [F : \mathbb{Q}] \in \{2^n, 2^{n+1}\}$$

Zdvojenie kocky

Tvrdenie

Číslo $\sqrt[3]{2}$ nie je skonštruovateľné.

$$m_u(x) = x^3 - 2$$

Trisekcia uhla

Tvrdenie

Číslo $\cos \frac{\pi}{9}$ nie je skonštruovateľné.

$$\cos \alpha = \cos^3 \frac{\alpha}{3} - 3 \cos \frac{\alpha}{3} \sin^2 \frac{\alpha}{3} = 4 \cos^3 \frac{\alpha}{3} - 3 \cos \frac{\alpha}{3}$$

$$\sin \alpha = 3 \cos^2 \frac{\alpha}{3} \sin \frac{\alpha}{3} - \sin^3 \frac{\alpha}{3} = 3 \sin \frac{\alpha}{3} - 4 \sin^3 \frac{\alpha}{3}$$

$$f(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}.$$

Transcendentné čísla, kvadratura kruhu

- ▶ Číslo π je transcendentné. (Bez dôkazu.)
- ▶ Číslo π nie je skonštruovateľné.
- ▶ Potom ani $\sqrt{\pi}$ nie je skonštruovateľné.