

Úvod

23. septembra 2024

Metrické priestory

Definícia

Nech X je množina. Zobrazenie $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ sa nazýva *metrika*, ak pre ľubovoľné $x, y \in X$ platí

(D1). $d(x, y) \geq 0$;

(D2). $d(x, y) = 0$ práve vtedy, keď $x = y$;

(D3). $d(x, y) = d(y, x)$

(D4). $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Ak d je metrika na X , tak dvojicu (X, d) nazývame *metrický priestor*.

Metrické priestory

- ▶ uzáver = limity postupností
- ▶ spojitosť = sekvenciálna spojitosť
- ▶ kompaktnosť vs. existencia konvergentnej podpostupnosti
- ▶ spojitá funkcia nadobúda maximum a minimum

Topologické priestory

Centrálne pojmy tejto prednášky:

- ▶ spojitosť
- ▶ konvergencia
- ▶ kompaktnosť

postupnosti $\longrightarrow$ siete, filtre

Aplikácia – kompaktnosť a aproximácie

$$\ell_1 \subsetneq \ell_\infty^*$$

Existuje funkcionál $\varphi \in \ell_\infty^*$, ktorý rozširuje obvyklú limitu.

- ▶ Platí $\varphi \in \ell_\infty^* \setminus \ell_1$.
- ▶ Dá sa ukázať pomocou Hahn-Banachovej vety.
- ▶ My sa pozrieme na dôkaz pomocou kompaktnosti a konvergencie.

Aplikácia – kompaktnosť a aproximácie

$$\begin{aligned}\varphi_i &: \ell_\infty \rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi_i &: x = (x_n)_{n=0}^\infty \mapsto x_i\end{aligned}$$

- ▶ Ležia v jednotkovej guli ℓ_∞ , so slabou* topológiou dostaneme kompaktnosť.
- ▶ Limita konvergentnej podsiete: $\varphi = \lim_{d \in D} \varphi_{n_d}$

Aplikácia – kompaktnosť a aproximácie

$$\varphi = \lim_{d \in D} \varphi_{n_d}$$

- ▶ φ je lineárne
- ▶ $\|\varphi_n\| = 1 \Rightarrow \|\varphi\| = 1$
- ▶ $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$
- ▶ $\bigvee_{d \in D} n_d \rightarrow \infty$ máme $\varphi(e^{(i)}) = 0$

$$\varphi \in \ell_\infty^* \setminus \ell_1$$