

Topologické priestory

25. septembra 2024

Definícia topológie

Definícia

Nech X je množina. Systém $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ sa nazýva *topológia* na množine X , ak platí:

(O1). $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

(O2). Ak $A, B \in \mathcal{T}$, tak aj $A \cap B \in \mathcal{T}$.

(O3). Ak $A_i \in \mathcal{T}$ pre každé $i \in I$, tak aj $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$.

Ak $\mathcal{T}$ je topológia na množine X , tak dvojicu $(X, \mathcal{T})$ nazývame *topologický priestor*. O množinách patriacich do $\mathcal{T}$ hovoríme, že sú to *otvorené množiny* v priestore $(X, \mathcal{T})$.

Definícia topológie

- ▶ Topológiu vieme zadať veľa inými spôsobmi – táto axiomatizácia je pomerne jednoduchá.
- ▶ Dá sa na to pozeráť tak, že „meriame“ vzdialenosť nie číslom, ale väčšími a menšími otvorenými okoliami.

Príklady topológií

- ▶ $\mathcal{T}_{ind} = \{\emptyset, X\} = \text{indiskrétna topológia}$
- ▶ $\mathcal{T}_{disc} = \mathcal{P}(X) = \text{diskrétna topológia}$
- ▶ Sierpińského priestor

Metrické priestory

Definícia

Nech X je množina. Zobrazenie $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ sa nazýva *metrika*, ak pre ľubovoľné $x, y \in X$ platí

(D1). $d(x, y) \geq 0$;

(D2). $d(x, y) = 0$ práve vtedy, keď $x = y$;

(D3). $d(x, y) = d(y, x)$

(D4). $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Ak d je metrika na X , tak dvojicu (X, d) nazývame *metrický priestor*.

Topológia odvodená od metriky

$$B(a, r) = \{x \in X; d(x, a) < r\}$$

- ▶ Bod $a \in U$ nazvime *vnútorný bod* množiny U , ak existuje reálne číslo $r > 0$ také, že $B(a, r) \subseteq U$.
- ▶ Ak každý bod množiny U je vnútorným bodom tejto množiny, tak hovoríme, že U je *otvorená v metrickom priestore* (X, d) .

$$(X, \mathcal{T}_d)$$

Uzavreté množiny

Definícia

Nech X je topologický priestor a $C \subseteq X$.

Podmnožina C sa nazýva *uzavretá množina*, ak jej doplnok $X \setminus C$ je otvorená množina.

Ak C je súčasne otvorená aj uzavretá v X , nazveme ju *obojaká množina*.

Sets are not doors. They can be open, closed, both, or neither.

Neznámy autor

Uzavreté množiny

Tvrdenie

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor. Označme ako $\mathcal{C}$ systém všetkých uzavretých množín v X . Potom platí:

(C1). $\emptyset, X \in \mathcal{C}$.

(C2). Ak $A, B \in \mathcal{C}$ tak, $A \cup B \in \mathcal{C}$.

(C3). Ak $A_i \in \mathcal{C}$ pre všetky $i \in I$ (pričom $I \neq \emptyset$), tak aj $\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{C}$.

Uzavreté množiny

Tvrdenie

Nech X je ľubovoľná množina. Nech $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ je systém množín, ktorý spĺňa podmienky (C1), (C2), (C3). Potom

$$\mathcal{T} = \{X \setminus C; C \in \mathcal{C}\}$$

je topológia na X .

Navyše, uzavreté množiny v $(X, \mathcal{T})$ sú presne množiny patriace do $\mathcal{C}$.

Kofinitná a kospočítateľná topológia

$$\mathcal{T}_{cof} = \{\emptyset\} \cup \{X \setminus F; F \text{ je konečná podmnožina } X\}$$

$$\mathcal{T}_{coc} = \{\emptyset\} \cup \{X \setminus F; F \text{ je spočítateľná podmnožina } X\}$$

Báza topológie

Definícia

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor. Systém $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ sa nazýva *báza topológie* $\mathcal{T}$, ak každá otvorená množina U je zjednotením nejakého systému množín patriacich do $\mathcal{B}$.

$$(\forall U \in \mathcal{T})(\exists \mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}) U = \bigcup \mathcal{S}$$

- ▶ $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$, t.j. všetky bazové množiny sú otvorené.
- ▶ Ekvivalentne: Pre ľubovoľné $x \in X$ a jeho otvorené okolie U existuje $B \in \mathcal{B}$ tak, že $x \in B \subseteq U$.

$$(\forall x \in U \in \mathcal{T})(\exists B \in \mathcal{B}) x \in B \subseteq U$$

Báza topológie

Veta

Ak $\mathcal{B}$ je báza nejakej topológie na X , tak platí:

(B1). $\mathcal{B}$ pokrýva X , t.j.

$$\bigcup \mathcal{B} = X.$$

(B2). Ak $B_{1,2} \in \mathcal{B}$ obsahujú bod $x \in X$, tak existuje $B \in \mathcal{B}$ také, že $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$.

$$(\forall x \in X)[x \in B_{1,2} \in \mathcal{B} \Rightarrow (\exists B \in \mathcal{B})x \in B \subseteq B_1 \cap B_2]$$

Báza topológie

Obrátene, ak $\mathcal{B}$ je systém podmnožín množiny X , ktorý spĺňa (B1) a (B2), tak množina všetkých zjednotení podsystémov $\mathcal{B}$ tvorí topológiu $\mathcal{T}$ na X .

$$\mathcal{T} = \{\bigcup \mathcal{C}; \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}\}$$

Navyše, $\mathcal{B}$ je báza topológie $\mathcal{T}$.

Príklady báz

- ▶ $\mathcal{B}_{disc} = \{\{x\}; x \in X\}$
- ▶ $\mathcal{B}_{ind} = \{X\}$

Topológia odvodená od metriky

$$B(a, r) = \{x \in X; d(x, a) < r\}$$

$$\mathcal{B} = \{B(a, r); a \in X, r \in \mathbb{R}, r > 0\}$$

Označenie: $\mathcal{T}_d$

Iná báza: $\mathcal{B}' = \{B(a, r); a \in X, r \in \mathbb{Q}, r > 0\}$

Sorgenfreyova priamka

Sorgenfreyova priamka (Lower limit topology)

$X = \mathbb{R}$ s topológiou danou bázou

$$\mathcal{B} = \{\langle a, b \rangle; a, b \in \mathbb{R}, a < b\}.$$

Označenie: $\mathbb{R}_l$ alebo $\mathcal{T}_l$.

- ▶ $\langle a, b \rangle$ je obojaká
- ▶ $\mathcal{T}_e \subseteq \mathcal{T}_l$

Subbáza

Definícia

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topológia a $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$. Hovoríme, že $\mathcal{S}$ *subbáza* topológie $\mathcal{T}$, ak

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap \mathcal{F}; \mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}, \mathcal{F} \text{ je neprázdna konečná množina} \right\}$$

tvorí bázu topológie $\mathcal{T}$.

T.j. $\mathcal{S}$ je subbáza práve vtedy, keď prieniky konečne veľa množín z $\mathcal{S}$ tvoria bázu.

Subbáza

Veta

Ak $\mathcal{S}$ je subbáza nejakej topológie na X , tak platí:

(S1). $\mathcal{S}$ pokrýva X , t.j.

$$\bigcup \mathcal{S} = X.$$

Obrátene, ak $\mathcal{S}$ je systém podmnožín množiny X , ktorý spĺňa (S1), tak množina všetkých prienikov konečných podsystemov systému $\mathcal{S}$, t.j.

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap \mathcal{F}; \mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}, \mathcal{F} \text{ je neprázdna konečná množina} \right\}$$

je bázou nejakej topológie na X .

Okolie bodu

Definícia

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor a $x \in X$. Podmnožina $N \subseteq X$ sa nazýva *okolie bodu* x , ak existuje otvorená množina U taká, že $x \in U \subseteq N$. Ak navyše N je otvorená množina, voláme ho *otvorené okolie*.

Systém všetkých okolí bodu x budeme označovať ako $\mathcal{N}_x$, systém všetkých otvorených okolí bodu x budeme označovať $\mathcal{O}_x$.

Báza okolí

Definícia

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor, $x \in X$. Nech $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{N}_x$, t.j. $\mathcal{B}_x$ je nejaký systém pozostávajúci z okolí bodu x . Hovoríme, že $\mathcal{B}_x$ je *báza okolí v bode* x , ak pre ľubovoľnú otvorenú množinu U obsahujúcu x existuje $B \in \mathcal{B}_x$ tak, že $B \subseteq U$.

$$(\forall U \in \mathcal{O}_x)(\exists B \in \mathcal{B}_x)x \in B \subseteq U$$

- ▶ Otvorené gule tvoria bázu pre $\mathcal{T}_d$.
- ▶ Uzavreté intervaly v $\mathbb{R}$ (uzavreté gule v $\mathbb{R}^n$).

Báza okolí

Veta

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor a $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ (t.j. $\mathcal{B}$ je nejaký systém otvorených množín). Potom $\mathcal{B}$ je báza topológie X práve vtedy, keď $\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B}; x \in B\}$ je báza okolí bodu x (pre každý bod $x \in X$).

Sorgenfreyova priamka

Príklad

$$\mathcal{B} = \{\langle a, b \rangle; a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$$

$$\mathcal{B}_x = \{\langle a, b \rangle; a, b \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$$

$$\mathcal{B}'_x = \{\langle x, b \rangle; b \in \mathbb{R}; x < b\}$$

$$\mathcal{B}''_x = \{\langle x, b \rangle; b \in \mathbb{Q}; x < b\}$$

Pre iracionálne x systém

$$\mathcal{C}_x = \{\langle a, b \rangle; a, b \in \mathbb{Q}; a \leq x < b\}$$

nie je báza okolí v bode x .

Báza okolí

Veta

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor.

Nech pre každé $x \in X$ je $\mathcal{B}_x$ báza okolí v bode $x \in X$, ktorá pozostáva iba z otvorených množín t.j. $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{T}$. Potom platí

(BO1). Pre každé $B \in \mathcal{B}_x$ platí $x \in B$.

(BO2). Ak $U_{1,2} \in \mathcal{B}_x$, tak existuje $U \in \mathcal{B}_x$ také, že $U \subseteq U_1 \cap U_2$.

(BO3). Ak $y \in U \in \mathcal{B}_x$, tak existuje $V \in \mathcal{B}_y$ také, že $V \subseteq U$.

Báza okolí

Veta

Obrátene, predpokladajme, že pre každý bod $x \in X$ máme priradený nejaký systém $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{P}(X)$ a tieto systémy vyhovujú požiadavkam (BO1)–(BO3). Potom

$$\mathcal{B} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}_x$$

spĺňa podmienky (B1) a (B2), je to teda báza nejakej topológie $\mathcal{T}$ na množine X . Navyše, pre túto topológiu $\mathcal{T}$ je jej lokálna báza v bode x práve $\mathcal{B}_x$.

Moorova rovina

Príklad

Na $\Gamma = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_2 \geq 0\}$ vezmeme v bodoch $b = (b_1, b_2)$ s $b_2 > 0$ bázu určenú euklidovskou metrikou, t.j.

$B(b, r) = \{(x_1, x_2) \in \Gamma; \|x - y\|_2 = \sqrt{(x_1 - b_1)^2 + (x_2 - b_2)^2} < r\}$,
a pre body s nulovou druhou súradnicou:

$$\{(b_1, 0)\} \cup \{\sqrt{(x_1 - b_1)^2 + (x_2 - r)^2} < r\}$$

Moorova rovina

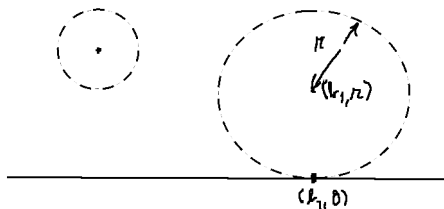


Figure: Bázoé množiny v Mooreovej rovine.

Uzáver

Definícia

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor a $A \subseteq X$. Potom množinu

$$\overline{A} = \bigcap \{C; A \subseteq C \subseteq X; C \text{ je uzavretá podmnožina } X\} \quad (1)$$

nazývame *uzáver množiny* A .

Niekedy budeme používať aj označenie $\text{cl}(A)$ resp. $\text{cl}_{\mathcal{T}}(A)$ – toto označenie bude užitočné najmä v prípade, ak budeme pracovať s uzávermi nejakej množiny v dvoch rôznych topológiách.

Uzáver

Tvrdenie

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor.

- (i) Pre ľubovoľné $A \subseteq X$ je množina $\overline{A}$ uzavretá.
- (ii) Množina $A \subseteq X$ je uzavretá práve vtedy, keď $A = \overline{A}$.
- (iii) Ak $A \subseteq C \subseteq X$ a C je uzavretá množina, tak $\overline{A} \subseteq C$.

Tvrdenie

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor, A, B sú podmnožiny X . Ak $A \subseteq B$, tak $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

$$A \subseteq B \quad \Rightarrow \quad \overline{A} \subseteq \overline{B} \quad (2)$$

Uzáver

Veta

Pre uzáver podmnožín topologického priestoru X platí:

$$(CL1). \quad \overline{\emptyset} = \emptyset;$$

$$(CL2). \quad A \subseteq \overline{A};$$

$$(CL3). \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$(CL4). \quad \overline{\overline{A}} = \overline{A}$$

Obrátene, ak máme operátor $\overline{} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$, ktorý spĺňa podmienky (CL1)–(CL4) a ak definujeme

$$\mathcal{C} = \{A \subseteq X; \overline{A} = A\},$$

tak systém $\mathcal{C}$ spĺňa podmienky (C1)–(C3). (Čiže množiny, pre ktoré platí $A = \overline{A}$, sú presne uzavreté množiny topológie $\mathcal{T}$, ktorú dostaneme ako doplnky takýchto množín.)

Uzáver

- ▶ Popis „zhora“ vs. „zdola“
- ▶ V metrických priestoroch: Uzáver = limity postupností.
- ▶ V topologických priestoroch: Uzáver = limity sietí.

Uzáver

Tvrdenie

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor, $x \in X$, $A \subseteq X$.

Potom $x \in \overline{A}$ práve vtedy, keď každé okolie U bodu x má neprázdny prienik s A .

$$x \in \overline{A} \quad \Leftrightarrow \quad (\forall U \in \mathcal{N}_x)(A \cap U \neq \emptyset)$$

Lokálne konečné systémy

Definícia

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor a $\mathcal{S}$ je nejaký systém podmnožín množiny X . Systém $\mathcal{S}$ sa nazýva *lokálne konečný*, ak pre každý bod $x \in X$ existuje okolie $U \ni x$, ktoré má neprázdny prienik iba s konečne veľa množinami z $\mathcal{S}$. (T.j. množina $\{S \in \mathcal{S}; S \cap U \neq \emptyset\}$ je konečná.)

Lokálne konečné systémy

Veta

Nech $\{A_i; i \in I\}$ je lokálne konečný systém. Potom

$$\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}.$$

Dôsledok

Zjednotenie lokálne konečného systému uzavretých množín je uzavretá množina.

Vnútro množiny

Definícia

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor a $A \subseteq X$. Potom *vnútro množiny* A definujeme ako

$$\text{Int } A = \bigcup \{U \subseteq A; U \text{ je otvorená v } X\}.$$

Tvrdenie

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor, A je podmnožina X . Potom:

$$\overline{A} = X \setminus \text{Int}(X \setminus A)$$

$$\text{Int } A = X \setminus \overline{X \setminus A}$$

Vnútro množiny

Tvrdenie

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor, $A, B \subseteq X$. Potom platí:

- (i) Ak $A \subseteq B$, tak $\text{Int } A \subseteq \text{Int } B$.*
- (ii) $\text{Int } A \subseteq A$*
- (iii) $\text{Int}(A \cap B) = \text{Int } A \cap \text{Int } B$*
- (iv) Množina $\text{Int } A$ je otvorená. Pre každú otvorenú množinu $U \subseteq X$ platí $\text{Int } U = U$.*
- (v) $\text{Int}(\text{Int } A) = \text{Int } A$*

Husté množiny

*Hustá polievka je taká, že kdekoľvek naberiem, tak je nejaký
rezanec.*

*Hustá prednáška je taká, že kdekoľvek otvorím poznámky a ukážem
prstom, tak je nejaké tvrdenie, ktorému nerozumiem.*

*Hustá množina je taká, že kdekoľvek sa pozriem, tak nájdem nejaké
body z tejto množiny.*

Neznámy autor

Husté množiny

Definícia

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor. Podmnožina $D \subseteq X$ je *hustá* v X , ak $\overline{D} = X$, t.j. jej uzáver je celý priestor.

Hustú množinu môžeme ekvivalentne charakterizovať tak, že D pretína každú neprázdnu otvorenú množinu.

$$(\forall U \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}) D \cap U \neq \emptyset$$

V tejto podmienke sa namiesto celej topológie stačí obmedziť na množiny z nejakej bázy $\mathcal{B}$.

Husté množiny

Tvrdenie

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor, $U, D \subseteq X$. Ak D je hustá množina a U je otvorená množina, tak

$$\overline{U \cap D} = \overline{U}.$$