

Spojitosť

14. októbra 2024

Spojitosť v bode

Metrické priestory: $f: (X, d) \rightarrow (Y, d')$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)d(x, a) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Spojitosť v bode

Definícia

Nech $f: X \rightarrow Y$ je funkcia, pričom X a Y sú topologické priestory. Nech $a \in X$. Hovoríme, že f je *spojitá v bode* a , ak pre ľubovoľné otvorené okolie V bodu $f(a)$ existuje otvorenú okolie U bodu a také, že $f[U] \subseteq V$.

$$(\forall V \in \mathcal{O}_{f(a)})(\exists U \in \mathcal{O}_a)f[U] \subseteq V \quad (1)$$

Spojitosť v bode

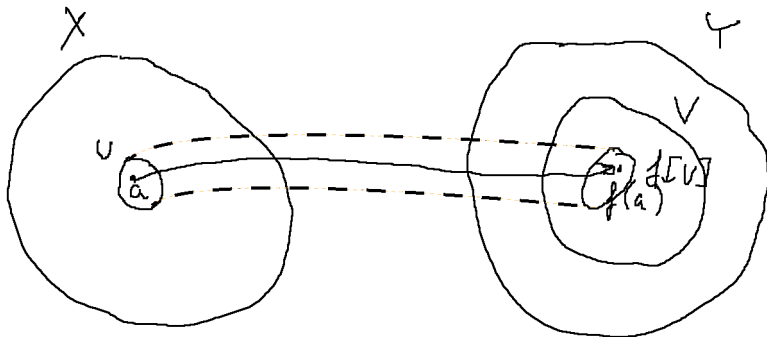


Figure: Definícia spojitosti v bode

Spojitost v bode

Stačí brať bázu okolí:

$$(\forall V \in \mathcal{B}_{f(a)})(\exists U \in \mathcal{B}_a)f[U] \subseteq V$$

Vzory otvorených množín

Definícia

Nech X, Y sú topologické priestory. Funkcia $f: X \rightarrow Y$ je *spojitá*, ak je spojitá v každom bode $a \in X$.

Veta

Nech X, Y sú topologické priestory a $f: X \rightarrow Y$ je zobrazenie. Zobrazenie f je spojité práve vtedy, keď pre každú otvorenú množinu U v priestore Y je aj jej vzor $f^{-1}[U]$ otvorená množina v X .

$$(\forall U \in \mathcal{T}_Y) f^{-1}[U] \in \mathcal{T}_X$$

Príklady spojitých funkcií

- ▶ $f: (X, \mathcal{T}_{disc}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$
- ▶ $f: (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_{ind})$
- ▶ konštantná funkcia
- ▶ $id_X: (X, \mathcal{T}_1) \rightarrow (\mathcal{T}_2) \Leftrightarrow \mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$

Vzory báзовých množín

Tvrdenie

Nech $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ sú topologické priestory, $\mathcal{B}$ je báza $\mathcal{T}_Y$, $\mathcal{S}$ je subbáza $\mathcal{T}_Y$. Nech $f: X \rightarrow Y$. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

- (i) f je spojité zobrazenie.
- (ii) Pre každé $V \in \mathcal{B}$ je $f^{-1}[V]$ otvorená množina.
- (iii) Pre každé $W \in \mathcal{S}$ je $f^{-1}[W]$ otvorená množina.

Príklad

$f^{-1}[(-\infty, b)]$ aj $f^{-1}[(a, \infty)]$ pre $a, b \in \mathbb{R}$.

Zloženie spojitých zobrazení

Veta

Nech $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ sú spojité zobrazenia medzi topologickými priestormi. Potom aj zložené zobrazenie $g \circ f: X \rightarrow Z$ je spojité.

$$g \circ f^{-1}[U] = f^{-1}[g^{-1}[U]]$$

Obraz uzáveru

Tvrdenie

Nech $f: X \rightarrow Y$ je zobrazenie medzi topologickými priestormi X a Y . Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

- (i) Zobrazenie f je spojité.*
- (ii) Pre každú uzavretú podmnožinu C v priestore Y je aj jej vzor $f^{-1}[C]$ uzavretá množina.*
- (iii) Pre ľubovoľné $A \subseteq X$ platí $f[\overline{A}] \subseteq \overline{f[A]}$.*

Obraz uzáveru

$$C = \overline{f[A]}$$

$$f^{-1}[C] = f^{-1}[\overline{f[A]}]$$

$$A \subseteq f^{-1}[f[A]] \subseteq f^{-1}[\overline{f[A]}]$$

$$\overline{A} \subseteq f^{-1}[\overline{f[A]}]$$

$$f[\overline{A}] \subseteq \overline{f[A]}$$

Obraz uzáveru

$$\begin{aligned}A &= f^{-1}[C] \\f[\overline{A}] &\subseteq \overline{f[A]} = \overline{f[f^{-1}[C]]} \subseteq \overline{C} = C \\f^{-1}[C] &\subseteq \overline{f^{-1}[C]} \subseteq f^{-1}[C] \\f^{-1}[C] &= \overline{f^{-1}[C]}\end{aligned}$$

Obraz hustej množiny

Dôsledok

Nech X, Y sú topologické priestory a $f: X \rightarrow Y$ je spojité surjektívne zobrazenie. Ak D je hustá množina v X , tak $f[D]$ je hustá množina v Y .

Definícia

Priestor Y nazývame *spojitým obrazom* priestoru X , ak existuje spojité surjektívne zobrazenie $f: X \rightarrow Y$.

Dôsledok

Spojitý obraz separabilného priestoru je separabilný priestor.