

Konvergenca sietí

20. novembra 2024

Postupnosti vs. siete

- ▶ Poznáme viaceré výsledky o metrických priestoroch, ktoré dávajú do súvisu topologické vlastnosti s konvergenciou postupností.
- ▶ Chceme zovšeobecniť pojem limity postupnosti tak, aby analogické tvrdenia fungovali v každom topologickom priestore.
- ▶ Na to zavedieme pojem siete (a neskôr aj pojem podsiete).

Postupnosti vs. siete

V priestoroch vyhovujúcich prvej axióme spočítateľnosti (resp. v metrických priestoroch) vieme:

- ▶ $a \in \overline{A} \Leftrightarrow$ existuje postupnosť prvkov z A taká, že $x_n \rightarrow a$
- ▶ spojitosť $\Leftrightarrow$ sekvenciálna spojitosť

$$x_n \rightarrow a \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \rightarrow f(a)$$

V metrických priestoroch je kompaktnosť charakterizovaná tak, že každá postupnosť má konvergentnú podpostupnosť.

Postupnosti vs. siete

- ▶ existuje postupnosť prvkov z A taká, že $x_n \rightarrow a \Leftrightarrow a \in \overline{A}$
- ▶ spojitosť $\Leftrightarrow$ sekvenciálna spojitosť

	uzáver	spojitosť
1. ax. spoč. + postupnosti	$\Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$
ľubovoľný + postupnosti	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$
ľubovoľný + postupnosti	$\nLeftrightarrow$	$\nLeftrightarrow$
ľubovoľný + siete	$\Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$

Nahor usmernená množina

Definícia

Nech $\leq$ je relácia na neprázdnej množine D . Množina D sa nazýva *nahor usmernená množina*, ak

(NU1). Pre každé $d \in D$ platí $d \leq d$. (reflexívnosť)

(NU2). Pre ľubovoľné $d_{1,2,3} \in D$ z $d_1 \leq d_2$ a $d_2 \leq d_3$ vyplýva $d_1 \leq d_3$. (tranzitívnosť)

(NU3). Pre ľubovoľné $d_{1,2} \in D$ existuje $d \in D$ tak, že $d_1 \leq d$ a $d_2 \leq d$.

Príklady: lineárne usporiadané množiny, $(\mathcal{B}_x, \supseteq)$

Nahor usmernená množina

Príklady:

- ▶ lineárne usporiadané množiny
- ▶ ľubovoľný zväz (=č.u.m., kde existuje $\sup\{d_1, d_2\}$, $\inf\{d_1, d_2\}$)
- ▶ $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, $(\mathcal{P}(X), \supseteq)$
- ▶ $(\mathcal{B}_x, \supseteq)$

Definícia siete

Definícia

Nech D je nahor usmernená množina a X je topologický priestor. Zobrazenie $d \mapsto x_d$ z D do X budeme nazývať *sieť* a označovať $(x_d)_{d \in D}$.

Limita siete

Definícia

Nech X je topologický priestor a $(x_d)_{d \in D}$ je sieť v X . Hovoríme, že sieť $(x_d)_{d \in D}$ *konverguje* k bodu $a \in X$, alebo tiež že a je *limita siete* $(x_d)_{d \in D}$, ak pre každé otvorené okolie $U \ni a$ existuje $d_0 \in D$ také, že $x_d \in U$ pre každé $d \geq d_0$.

$$(\forall U \in \mathcal{O}_a)(\exists d_0 \in D)(\forall d \in D)(d \geq d_0 \Rightarrow x_d \in U) \quad (1)$$

Označenie: $a \in \lim x_d$, $x_d \rightarrow a$

$$(\forall U \in \mathcal{O}_a)(\exists d_0 \in D)(\langle d_0, \infty \rangle \subseteq x^{-1}[U]) \quad (2)$$

Príklady

- ▶ Postupnosti
- ▶ Ak M je najväčší prvok $(D, \leq)$, tak $x_d \rightarrow x_M$.

$$x_d \rightarrow a \quad \Leftrightarrow \quad a \in \overline{\{x_M\}}$$

Stačí subbáza

Tvrdenie

*Nech $(x_d)_{d \in D}$ je sieť v topologickom priestore $(X, \mathcal{T})$ a nech $a \in X$.
Nech $\mathcal{S}$ je subbáza topológie $\mathcal{T}$. Sieť $(x_d)_{d \in D}$ konverguje k a práve
vtedy, keď pre každé $U \in \mathcal{S}$ obsahujúce a existuje $d_0 \in D$ také, že
 $x_d \in U$ pre každé $d \geq d_0$.*

$$\left(\bigvee_{U \ni a} U \in \mathcal{S} \right) (\exists d_0 \in D) \left(\bigvee_{d \geq d_0} d \in D \right) x_d \in U$$

Limity sietí popisujú topológiu

Lema

Nech X je topologický priestor a $a \in X$. Predpokladajme, že pre každé $U \in \mathcal{O}_a$ máme nejaký bod $x_U \in U$. Potom sieť $(x_U)_{U \in \mathcal{O}_a}$ na nahor usmernenej množine $(\mathcal{O}_a, \supseteq)$ konverguje k a .

To isté tvrdenie platí ak $\mathcal{O}_a$ nahradíme nejakou bázou okolí $\mathcal{B}_a$ v bode a .

Limity sietí popisujú topológiu

Veta

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor, $a \in X$ a $A \subseteq X$. Potom $a \in \overline{A}$ práve vtedy, keď existuje sieť $(x_d)_{d \in D}$ taká, že $x_d \rightarrow a$ a pre všetky $d \in D$ platí $x_d \in A$.

$$a \in \overline{A} \Leftrightarrow (\exists (x_d)_{d \in D})[(\forall d) x_d \in A \wedge x_d \rightarrow a]$$

Veta

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor a $C \subseteq X$. Množina C je uzavretá práve vtedy, keď pre ľubovoľnú konvergentnú sieť pozostávajúcu z bodov patriacich do C aj každá jej limita patrí do C .

Priestor $\{0, 1\}^{\mathbb{R}}$

$$D = \{F \subseteq \mathbb{R}; F \text{ je konečná}\}$$

- ▶ Definujeme sieť $(\chi_F)_{F \in D}$.
- ▶ $\chi_F \rightarrow \chi_{\mathbb{R}}$

Priestor $\langle 0, \omega_1 \rangle$

- ▶ $x_\alpha = \alpha$ dáva sieť na nahor usmerennej množine ω_1
- ▶ $x_\alpha \rightarrow \omega_1$

Jednoznačnosť limity a hausdorffovské priestory

Definícia

Topologický priestor $(X, \mathcal{T})$ sa nazýva *hausdorffovský priestor* alebo *T_2 -priestor*, ak pre ľubovoľné $a, b \in X$ také že $a \neq b$ existujú disjunktné otvorené množiny $U \ni a, V \ni b$.

$$(\forall a, b \in X)[a \neq b \Rightarrow (\exists U, V \in \mathcal{T})(a \in U \wedge b \in V \wedge U \cap V = \emptyset)]$$

Veta

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor. Priestor X je hausdorffovský práve vtedy, keď každá sieť v X má nanajvýš jednu limitu.

Priestor $C(D)$ a konvergenca sietí

Definícia

Pre ľubovoľnú nahor usmernenú množinu $(D, \leq)$ definujeme priestor $C(D)$ nasledovne: Množina s ktorou budeme pracovať je $D \cup \{\infty\}$, kde $\infty \notin D$.

Pre $d \in D$ označme

$$\hat{d} = \{x \in D; x \geq d\} \cup \{\infty\}.$$

Ak položíme

$$\mathcal{B} = \{\{d\}; d \in D\} \cup \{\hat{d}; d \in D\},$$

tak dostaneme bázu topológie na množine $D \cup \{\infty\}$

Tento topologický priestor označíme $C(D)$.

Priestor $C(D)$ a konvergenca sietí

Tvrdenie

Nech X je topologický priestor a $(x_d)_{d \in D}$ je sieť v X . Nech $a \in X$.
Potom sieť $(x_d)_{d \in D}$ konverguje k a práve vtedy, keď zobrazenie $\bar{x}: C(D) \rightarrow X$ definované ako

$$\bar{x}(d) = \begin{cases} x_d & \text{ak } d \in D, \\ a & \text{ak } d = \infty \end{cases}$$

je spojité.

Konvergenca sietí a spojitosť

Tvrdenie

Nech $f: X \rightarrow Y$ je zobrazenie medzi topologickými priestormi X , Y . Zobrazenie f je spojité v bode a práve vtedy, keď pre každú sieť $(x_d)_{d \in D}$ konvergujúcu k bodu a v X aj sieť $(f(x_d))_{d \in D}$ konverguje k $f(a)$ v priestore Y .

$$x_d \rightarrow a \quad \Rightarrow \quad f(x_d) \rightarrow f(a)$$

Dôsledok

Nech X a Y sú topologické priestory. Zobrazenie $f: X \rightarrow Y$ je spojité práve vtedy, keď pre každú sieť $(x_d)_{d \in D}$ v priestore X platí: Ak sieť $(x_d)_{d \in D}$ konverguje k bodu $a \in X$, tak sieť $(f(x_d))_{d \in D}$ konverguje k $f(a)$.

$$x_d \rightarrow a \implies f(x_d) \rightarrow f(a)$$

Iniciálna topológia

Veta

Nech X je topologický priestor s iniciálnou topológiou vzhľadom na $\{f_i: X \rightarrow Y_i\}$. Nech $(x_d)_{d \in D}$ je sieť v X a nech $a \in X$.

Sieť $(x_d)_{d \in D}$ konverguje k a (v iniciálnej topológii) práve vtedy, keď pre každé $i \in I$ konverguje sieť $(f_i(x_d))_{d \in D}$ ku $f_i(a)$ (v priestore Y_i).

$$x_d \rightarrow a \quad \Leftrightarrow \quad (\forall i \in I) f_i(x_d) \rightarrow f_i(a) \quad (3)$$

Súčin, podpriestor

Dôsledok

Nech $(x_d)_{d \in D}$ je sieť v topologickom súčine $\prod_{i \in I} X_i$. Táto sieť konverguje k bodu a práve vtedy, keď pre každé $i \in I$ sieť $(p_i(x_d))_{d \in D}$ konverguje k $p_i(a)$ v priestore X_i .

$$x_d \rightarrow a \quad \Leftrightarrow \quad (\forall i \in I) p_i(x_d) \rightarrow p_i(a) \quad (4)$$

súčinová topológia = topológia bodovej konvergenencie

Dôsledok

Nech X je topologický priestor a S je jeho podpriestor. Nech $(x_d)_{d \in D}$ je sieť v S a $a \in S$. Táto sieť konverguje k a v podpriestore S práve vtedy, keď konverguje k a v priestore X .

Riemannov a Darbouxov integrál

$$S(f, D) = \sum_{k=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$U(f, d) = \sum_{k=1}^n \sup_{t \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle} f(t)(x_i - x_{i-1})$$

$$L(f, d) = \sum_{k=1}^n \inf_{t \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle} f(t)(x_i - x_{i-1})$$

Riemannov a Darbouxov integrál

$$S(f, D) = \sum_{k=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

- ▶ Delenia môžeme usporiadať a dostaneme tak nahor usmernenú množinu.
- ▶ Potom $D \mapsto S(f, D)$ je sieť, limita tejto siete je presne Riemannov integrál.
- ▶ Podobne viem dostať horný a dolný integrál ako limity sietí.

Nespočítateľné sumy

Definícia

Nech pre každé $i \in I$ je x_i reálne číslo. Označme

$$D = \{F \subseteq I; F \text{ je konečná}\}$$

a pre každé $F \in D$ položíme $S_F = \sum_{i \in F} x_i$.

Potom súčet

$$S = \sum_{i \in I} x_i.$$

definujeme ako limitu siete $(S_F)_{F \in D}$ na nahor usmernenej množine $(D, \subseteq)$.

Nespočítateľné sumy

- ▶ Podarilo sa nám takto povedať zmysluplnú definíciu súčtu cez ľubovoľnú indexovú množinu.
- ▶ Ak $x_i \geq 0$ pre všetky $i \in I$, tak ekvivalentnú definíciu by sme dostali ako $S = \sup_{F \in D} S_F$.
- ▶ Ak $I = \mathbb{N}$ tak S je súčtom v zmysle tejto definície práve vtedy, keď pre každé preusporiadanie $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dostaneme ten istý radu $S = \sum_{i=0}^{\infty} x_{\sigma(i)}$
- ▶ Ak existuje (konečný) súčet $\sum_{i \in I} x_i$, tak potom množina $\{i \in I; x_i \neq 0\}$ je spočítateľná. (T.j. nenulové prvky sa môžu vyskytnúť len pre spočítateľne veľa indexov.)

Definícia podsiete

Definícia

Nech $x = (x_d)_{d \in D}$ je sieť v topologickom priestore X . Sieť $(y_e)_{e \in E}$ na nahor usmernenej množine E sa nazýva *podsieť* siete x , ak existuje zobrazenie $h: E \rightarrow D$ také, že

$$y_e = x_{h(e)}$$

a navyše zobrazenie h spĺňa podmienku

$$(\forall d \in D)(\exists e_0 \in E)(\forall e \in E)(e \geq e_0 \Rightarrow h(e) \geq d). \quad (5)$$

- ▶ Iné označenie: $(x_{d_e})_{e \in E}$, kde $h(e) = d_e$.
- ▶ (5) hovorí, že $h(e) \rightarrow \infty$ v $C(D)$.
- ▶ Podsieť postupnosti nemusí byť postupnosť

Podsiete

Tvrdenie

Ak sieť $(x_d)_{d \in D}$ konverguje k a , tak aj každá jej podsieť $(x_{d_e})_{e \in E}$ konverguje k a .

Hromadné body

Definícia

Nech $(x_d)_{d \in D}$ je sieť v topologickom priestore X . Bod $a \in X$ je *hromadný bod* siete $(x_d)_{d \in D}$ ak pre každé okolie U body x a pre každé $d_0 \in D$ existuje $d \geq d_0$ také, že $x_d \in U$.

$$(\forall U \in \mathcal{O}_a)(\forall d_0 \in D)(\langle d_0, \infty \rangle \cap x^{-1}[U] \neq \emptyset) \quad (6)$$

Tvrdenie

Nech $(x_d)_{d \in D}$ sieť v topologickom priestore X a $a \in X$. Bod a je *hromadný bod* siete $(x_d)_{d \in D}$ práve vtedy, keď existuje podsieť tejto siete, ktorá konverguje k a .

Hromadné body

Tvrdenie

Nech $(x_d)_{d \in D}$ sieť v topologickom priestore X a $a \in X$. Bod a je hromadný bod siete $(x_d)_{d \in D}$ práve vtedy, keď pre každé $d \in D$ platí

$$a \in \overline{\{x_e; e \in D, e \geq d\}}.$$

$$a \in \bigcap_{d \in D} \overline{\{x_e; e \in D, e \geq d\}}$$

Dôsledok

Množina hromadných bodov siete $(x_d)_{d \in D}$ je uzavretá množina v X .

Veta

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

Kofinálna podsieť

Definícia

Nech $(x_d)_{d \in D}$ je sieť na nahor usmernenej množine D . Nech $E \subseteq D$ je podmnožina taká, že pre každé $d_0 \in D$ existuje $e \in E$ s vlastnosťou $e \geq d_0$;

$$(\forall d \in D)(\exists e \in E)(e \geq d_0). \quad (7)$$

dostaneme tak sieť $x|_E$ na nahor usmernenej množine E . (T.j. sieť $(x_e)_{e \in E}$.)

Takúto sieť nazývame *kofinálna podsieť* siete $(x_d)_{d \in D}$.

Viaceré tvrdenia platné pre iste už neplatia, ak sa obmedzíme na kofinálne podsiete.