

Súvislé priestory

9. decembra 2024

Súvislé priestory

Definícia

Topologický priestor X sa nazýva *súvislý*, ak neexistujú neprázdne disjunktné otvorené podmnožiny priestoru X také, že $A \cup B = X$. Hovoríme, že podmnožina C v topologickom priestore X je *súvislá*, ak C s relatívnou topológiou je súvislý priestor.

Tvrdenie

Nech X je topologický priestor. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

- (i) X je súvislý.
- (ii) Ak A je obojaká množina v X , tak $A = \emptyset$ alebo $A = X$.
- (iii) Ak D je diskretný dvojprvkový priestor a $f: X \rightarrow D$ je spojité zobrazenie, tak f je konštantné.

Príklady

- ▶ Diskrétny priestor $|X| \geq 2$ nie je súvislý.
- ▶ Sorgenfreyova priamka $\mathbb{R}_l$ nie je súvislý priestor.

Tvrdenie

Interval $\langle 0, 1 \rangle$ s obvyklou topológiou je súvislý priestor.

Hustá súvislá podmnožina

Tvrdenie

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor. Ak D je hustá množina v X , ktorá je súvislá, tak aj priestor X je súvislý.

Dôsledok

Nech X je topologický priestor a C je nejaká súvislá množina v X . Potom aj ľubovoľná podmnožina A taká, že $C \subseteq A \subseteq \overline{C}$ je súvislá.

Spojitéý obraz

Tvrdenie

Spojitéý obraz súvislého priestoru je súvislý.

Reťaze

Definícia

Nech X je topologický priestor a $x, y \in X$. Nech $\mathcal{U}$ je otvorené pokrytie priestoru X . Povieme, že konečná postupnosť množín $U_0, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ je *reťaz* v $\mathcal{U}$ spájajúca x, y ak $x \in U_0$, $y \in U_n$ a pre každé $i = 0, \dots, n - 1$ platí $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$.

Tvrdenie

Nech X je topologický priestor. Priestor X je súvislý práve vtedy, keď pre ľubovoľné otvorené pokrytie $\mathcal{U}$ a pre ľubovoľné $x, y \in X$ existuje reťaz v $\mathcal{U}$ spájajúca x a y .

Neprázdny prienik

Tvrdenie

Nech X je topologický priestor a $\{Y_i; i \in I\}$ je systém súvislých podmnožín priestoru X . Ak platí $\bigcap_{i \in I} Y_i \neq \emptyset$, tak aj množina

$Y = \bigcup_{i \in I} Y_i$ je súvislá.

Dôsledok

Podpriestor $S \subseteq \mathbb{R}$ reálnej osi (s obvyklou topológiou) je súvislý práve vtedy, keď S je interval.

Dôsledok

Nech X je topologický priestor. Ak pre ľubovoľné $x, y \in S$ existuje súvislý podpriestor $S_{x,y}$ taký, že $x, y \in S_{x,y}$, tak priestor X je súvislý.

Súčin súvislých priestorov

Tvrdenie

Ak X, Y sú súvislé priestory, tak ich topologický súčin $X \times Y$ je opäť súvislý.

Ak $X_1, \dots, X_n$ sú súvislé priestory, tak aj ich súčin $\prod_{i=1}^n X_i$ je súvislý.

Veta

Nech pre každé $i \in I$ je X_i neprázdny topologický priestor.

Topologický súčin $\prod_{i \in I} X_i$ je súvislý práve vtedy, keď priestor X_i je súvislý pre každé $i \in I$.

Komponenty súvislosti

Definícia

Ak X je topologický priestor a $C \subseteq X$ je maximálna (vzhľadom na inklúziu) súvislá podmnožina priestoru X , tak hovoríme, že C je *komponent súvislosti* priestoru X .

Tvrdenie

Nech X je topologický priestor a $x \in X$. Ak položíme

$$C_x = \bigcup \{C \subseteq X; x \in C, C \text{ je súvislá množina}\},$$

tak C_x je súvislá množina obsahujúca x , ktorá je navyše maximálna vzhľadom na inklúziu – teda je to komponent súvislosti.

Množinu C_x nazývame komponent súvislosti bodu x .

Komponenty súvislosti

Tvrdenie

Nech X je topologický priestor a $x \in X$. Ak položíme

$$C_x = \bigcup \{C \subseteq X; x \in C, C \text{ je súvislá množina}\},$$

tak C_x je súvislá množina obsahujúca x , ktorá je navyše maximálna vzhľadom na inklúziu – teda je to komponent súvislosti.

Množinu C_x nazývame komponent súvislosti bodu x .

Dôsledok

Ak X je topologický priestor a S je súvislá množina, tak existuje komponent súvislosti C taký, že $S \subseteq C$.

Komponenty súvislosti

Tvrdenie

Komponenty súvislosti priestoru X tvoria rozklad množiny X . (T.j. sú navzájom disjunktné a ich zjednotenie je celé X .)

Veta

Všetky komponenty súvislosti v X sú uzavreté.

Vo všeobecnosti komponenty nemusia byť otvorené.

Príklad

Uvažujme $\mathbb{Q}$ s obvyklou topológiou. Všetky komponenty súvislosti priestoru $\mathbb{Q}$ sú jednoprvkové.

Lineárne súvislé priestory

Definícia

Topologický priestor X sa nazýva *lineárne súvislý*, ak pre ľubovoľné $x, y \in X$ existuje spojitě zobrazenie $f: \langle 0, 1 \rangle \rightarrow X$ také, že $f(0) = x$, $f(1) = y$. Takéto zobrazenie f nazývame *cesta* z x do y . Priestor X nazveme *oblúkovo súvislý*, ak pre ľubovoľné $x, y \in X$ existuje vloženie $h: \langle 0, 1 \rangle \rightarrow X$ také, že $h(0) = x$, $h(1) = y$. (Tu teda navyše žiadame, aby $h[\langle 0, 1 \rangle] \cong \langle 0, 1 \rangle$, t.j. podpriestor $h[\langle 0, 1 \rangle]$ je homeomorfný s jednotkovým intervalom.)

Lineárne súvislé priestory

Tvrdenie

Ak X je oblúkovo súvislý, tak je lineárne súvislý.

Ak X je lineárne súvislý, tak je súvislý.

Pre T_2 priestory: oblúkovo súvislý $\Leftrightarrow$ lineárne súvislý. (Dôkaz nie je jednoduchý.)

Lineárne súvislé priestory

Príklad

$$X = \{(0, 0)\} \cup \{(x, \sin \frac{1}{x}); x \in \mathbb{R}, x > 0\}$$

Priestor X je súvislý, ale nie je lineárne súvislý.

Lineárne súvislé priestory

Tvrdenie

Nech X je topologický priestor. Uvažujme reláciu $x \sim y$ zadanú tak, že x a y sú v relácii ak existuje cesta z x do y . Potom $\sim$ je relácia ekvivalencie na X .

Triedy ekvivalencie sa nazývajú komponenty lineárnej súvislosti priestoru X .

Lineárne súvislé priestory

Tvrdenie

Nech X je topologický priestor

- (i) *Ak $\{Y_i; i \in I\}$ je systém lineárne súvislých podmnožín priestoru X . Ak platí $\bigcap_{i \in I} Y_i \neq \emptyset$, tak aj množina $Y = \bigcup_{i \in I} Y_i$ je lineárne súvislá.*
- (ii) *Ak $Y \subseteq X$ a pre každé $x, y \in Y$ existuje lineárne súvislý podpriestor $S_{x,y}$ taký, že $x, y \in S_{x,y}$, tak aj celá množina Y je lineárne súvislá.*

Dôsledok

Každý komponent lineárnej súvislosti je lineárne súvislá množina.

Lineárne súvislé priestory

Tvrdenie

Nech X je topologický priestor.

Množina $C \subseteq X$ je komponent lineárnej súvislosti priestoru X práve vtedy, keď C je lineárne súvislá podmnožina priestoru X , ktorá je maximálna vzhľadom na inklúziu.

Lineárne súvislé priestory

Tvrdenie

Ak pre každé $i \in I$ je X_i lineárne súvislý priestor, tak aj súčin

$X = \prod_{i \in I} X_i$ je lineárne súvislý.

Lokálne súvislé priestory

Definícia

Topologický priestor X nazveme *lokálne súvislý*, ak pre každé $x \in X$ existuje báza okolí pozostávajúca z otvorených súvislých množín.

Priestor X je *lokálne lineárne súvislý*, ak každý bod $x \in X$ má bázu okolí tvorenú otvorenými lineárne súvislými množinami.

Lokálne súvislé priestory

Príklad

Nech X je podpriestor $\mathbb{R}^2$, ktorý pozostáva zo všetkých úsečiek spájajúcich bod $(0, 1)$ s niektorými z bodov $(0, 0)$ a $(0, \frac{1}{n+1})$ pre $n \in \mathbb{N}$.

Tento priestor je súvislý a aj lineárne súvislý. Nie je však lokálne súvislý ani lokálne lineárne súvislý; dostatočne malé okolie bodu $(0, 0)$ nie je súvislé.

Lokálne súvislé priestory

Tvrdenie

Nech X je topologický priestor. Ak X je súvislý a lokálne lineárne súvislý, tak X je lineárne súvislý.

Tvrdenie

Nech X je topologický priestor. Priestor X je lokálne súvislý práve vtedy, keď pre každú otvorenú množinu sú aj všetky jej komponenty súvislosti otvorené.

Lokálne súvislé priestory

Tvrdenie

Nech X je topologický priestor. Priestor X je lokálne súvislý práve vtedy, keď pre každú otvorenú množinu sú aj všetky jej komponenty súvislosti otvorené.

Dôsledok

Komponenty súvislosti v lokálne súvislom priestore sú obojaké množiny.

Dôsledok

Kompaktný lokálne súvislý priestor má konečne veľa komponent súvislosti.

Lokálne súvislé priestory

Tvrdenie

Nech X je topologický priestor. Priestor X je lokálne súvislý práve vtedy, keď pre každú otvorenú množinu sú aj všetky jej komponenty súvislosti otvorené.

Tvrdenie

Faktorový priestor lokálne súvislého priestoru je lokálne súvislý.

Indukcia na reálnej osi

Tvrdenie

Nech $S \subseteq \langle a, b \rangle$ je podmnožina, ktorá spĺňa podmienky:

- ▶ $a \in S$.
- ▶ Ak $x \in S$ pre nejaké $y < b$, tak existuje $y > x$ také, že $\langle x, y \rangle \subseteq S$.
- ▶ Ak pre $x \leq b$ platí $\langle a, x \rangle \subseteq S$, tak aj $x \in S$.

Potom $S = \langle a, b \rangle$.