

Všeobecná topológia – sada úloh č. 3

Každá z uvedených úloh má hodnotu 20 bodov. Rozumné je každú z nich začať na novej strane.

Úloha 1. Pre každé $i \in I$ majme topologický priestor X_i a nejakú podmnožinu $A_i \subseteq X_i$. Ukážte, že

$$\prod_{i \in I} \overline{A_i} = \overline{\prod_{i \in I} A_i}.$$

Úloha 2. Nech $f: M \rightarrow X$, $g: M \rightarrow Y$ a $\mathcal{F}$ je filter na množine M . Ukážte, že:

- a) Ak a je $\mathcal{F}$ -limita funkcie f a b je $\mathcal{F}$ -limita funkcie g , tak (a, b) je $\mathcal{F}$ -limita funkcie $h = \langle f, g \rangle$ určenej ako $h(x) = (f(x), g(x))$.
- b) Ak navyše predpokladáme $X = Y = \mathbb{R}$, tak ukážte, že $a + b$ je $\mathcal{F}$ -limita funkcie $f + g$.

Úloha 3. Nech A, B sú disjunktné uzavreté podmnožiny metrického priestoru (X, d) . Dokážte, že predpis

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$$

definuje zobrazenie $f: X \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$, ktoré je spojité a platí preň $f|_A = 0$ a $f|_B = 1$. (T.j. v metrických priestoroch vieme priamo napísať predpis zobrazenia o akom hovorí Urysohnova lema.)

Úloha 4. Ukážte, že ak priestor X spĺňa Urysohnovu lemu, tak je normálny.

T.j. chceme ukázať, že X je normálny, ak vieme, že pre ľubovoľné disjunktné uzavreté podmnožiny A, B tohto priestoru existuje spojitá funkcia $f: X \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ taká, že

$$A \subseteq f^{-1}[\{0\}] \quad \text{a} \quad B \subseteq f^{-1}[\{1\}].$$

Úloha 5. Nech $X = \{0, 1\}^\omega$ je súčin spočítateľne veľa kópií diskretného dvojprvkového priestoru a nech $I = \langle 0, 1 \rangle$ je uzavretý jednotkový interval s obvyklou topológiou. Položme

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}}.$$

- a) Ukážte, že uvedený predpis priradí každému $x \in X$ práve jeden prvok $\varphi(x) \in I$, teda naozaj dostávame zobrazenie $\varphi: X \rightarrow I$.
- b) Ukážte, že zobrazenie φ je spojité.
- c) Ukážte, že zobrazenie φ je surjektívne. Je toto zobrazenie aj injektívne?
- d) Dajú sa veci dokázané v predchádzajúcich častiach využiť na dôkaz kompaktnosti priestoru $I = \langle 0, 1 \rangle$?