

Všeobecná topológia – sada úloh č. 5

Každá z uvedených úloh má hodnotu 20 bodov. Rozumné je každú z nich začať na novej strane.

Úloha 1. Nech $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ sú topologické priestory, a nech $\mathcal{B}_X$ je báza topológie $\mathcal{T}_X$, $\mathcal{B}_Y$ je topológia $\mathcal{T}_Y$.

Zobrazenie $f: X \rightarrow Y$ je spojité práve vtedy, keď:

- a) Pre každé $V \in \mathcal{T}_Y$ platí $f^{-1}[V] \in \mathcal{T}_X$.
- b) Pre každé $V \in \mathcal{T}_Y$ a $x \in X$ také, že $f(x) \in V$ existuje $U \in \mathcal{T}_X$ také, že $x \in U$ a $f[U] \subseteq V$.

Zistite, či tieto ekvivalencie zostanú v platnosti ak všade namiesto $\mathcal{T}$ napíšeme $\mathcal{B}$. (Svoje tvrdenie zdôvodnite.)

Úloha 2. Nech $f: M \rightarrow X$, $g: M \rightarrow Y$ a $\mathcal{F}$ je filter na množine M . Ukážte, že:

- a) Ak a je $\mathcal{F}$ -limita funkcie f a b je $\mathcal{F}$ -limita funkcie g , tak (a, b) je $\mathcal{F}$ -limita funkcie $h = \langle f, g \rangle$ určenej ako $h(x) = (f(x), g(x))$.
- b) Ak navyše predpokladáme $X = Y = \mathbb{R}$, tak ukážte, že $a + b$ je $\mathcal{F}$ -limita funkcie $f + g$.

Úloha 3. Ukážte, že topologický priestor $(X, \mathcal{T})$ je normálny práve vtedy, keď platí nasledujúca podmienka: Pre ľubovoľné otvorené podmnožiny $U, V \subseteq X$ také, že $U \cup V = X$ existujú uzavreté množiny $C, D \subseteq X$ tak, že $C \subseteq U$, $D \subseteq V$ a $C \cup D = X$.

Úloha 4. Ukážte, že ak priestor X spĺňa Urysohnovu lemu, tak je normálny.

T.j. chceme ukázať, že X je normálny, ak vieme, že pre ľubovoľné disjunktné uzavreté podmnožiny A, B tohto priestoru existuje spojitá funkcia $f: X \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ taká, že

$$A \subseteq f^{-1}[\{0\}] \quad \text{a} \quad B \subseteq f^{-1}[\{1\}].$$

Úloha 5. Nech $X = \{0, 1\}^\omega$ je súčin spočítateľne veľa kópií diskrétného dvojprvkového priestoru a nech $I = \langle 0, 1 \rangle$ je uzavretý jednotkový interval s obvyklou topológiou. Položme

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}}.$$

- a) Ukážte, že uvedený predpis priradí každému $x \in X$ práve jeden prvok $\varphi(x) \in I$, teda naozaj dostávame zobrazenie $\varphi: X \rightarrow I$.
- b) Ukážte, že zobrazenie φ je spojité.
- c) Ukážte, že zobrazenie φ je surjektívne. Je toto zobrazenie aj injektívne?
- d) Dajú sa veci dokázané v predchádzajúcich častiach využiť na dôkaz kompaktnosti priestoru $I = \langle 0, 1 \rangle$?