

Prevrátený rad prvočísel

29. septembra 2026

Ľubovoľne dlhé postupnosti

Veta

Existuje ľubovoľne dlhá postupnosť po sebe idúcich zložených čísel.

Rad prevrátených hodnôt

Pre $A \subseteq \mathbb{N}$ môže rad $\sum_{n \in A} \frac{1}{n}$ konvergovať alebo divergovať.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = ?$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = ?$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = ?$$

Rad prevrátených hodnôt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = e - 1$$

Čísla bez štvorcov

Definícia

Hovoríme, že číslo $n \in \mathbb{N}$ je *číslo bez kvadratických deliteľov*, ak neexistuje prirodzené číslo $k > 1$ také, že $k^2 \mid n$.

Čísla bez štvorcov

Definícia

Hovoríme, že číslo $n \in \mathbb{N}$ je *číslo bez kvadratických deliteľov*, ak neexistuje prirodzené číslo $k > 1$ také, že $k^2 \mid n$.

- ▶ Presne tie čísla, kde kanonický rozklad obsahuje iba prvé mocniny prvočísel, t.j. $n = p_1 \dots p_k$.
- ▶ Každé prirodzené číslo možno jednoznačne napísať v tvare $n = jk^2$, kde j nemá kvadratických deliteľov.

Rad prevrátených hodnôt prvočísel

Veta

Rad prevrátených hodnôt prvočísel diverguje, t.j.

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p} = \infty.$$

$$\sum \frac{1}{p} = \infty$$

Prvý dôkaz

$$e^x > 1 + x$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k}$$

$$e^{S_n} = \prod_{k=1}^n e^{\frac{1}{p_k}} > \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{p_k}\right).$$

$$e^{S_n} > \sum_{\substack{j \leq p_n \\ j \in B}} \frac{1}{j}$$

Prvý dôkaz

$$\left(\sum_{\substack{j \leq p_n \\ j \in B}} \frac{1}{j} \right) \left(\sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{k^2} \right) \geq \sum_{t=1}^{p_n} \frac{1}{t}.$$

$$\frac{\pi^2}{6} e^S > \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t}$$

Druhý dôkaz

Sporom – nech $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ konverguje.

$$\sum_{i \geq k+1} \frac{1}{p_i} < \frac{1}{2}$$

$$\sum_{i \geq k+1} \frac{N}{p_i} < \frac{N}{2}$$

Druhý dôkaz

$$N_b \leq \sum_{i \geq k+1} \left\lfloor \frac{N}{p_i} \right\rfloor \leq \sum_{i \geq k+1} \frac{N}{p_i} < \frac{N}{2}$$
$$N_s \leq 2^k \sqrt{N}$$

$$N = N_b + N_s < \frac{N}{2} + 2^k \sqrt{N} < N$$

Tretí dôkaz

Tvrdenie

Ak rad $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p}$ konverguje, tak $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(n)}{n} = 0$, kde

$$\pi(n) = |\{p \in \mathbb{P}; p \leq n\}|$$

označuje počet prvočísel neprevyšujúcich n .

Tretí dôkaz

$$R_n = \sum_{p \leq n, p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p}$$

$$\begin{aligned}\pi(n) &= R_1 - R_0 + 2(R_2 - R_1) + \dots + n(R_n - R_{n-1}) \\ &= nR_n - (R_0 + R_1 + \dots + R_{n-1})\end{aligned}$$

$$\frac{\pi(n)}{n} = R_n - \frac{R_0 + R_1 + \dots + R_{n-1}}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_0 + R_1 + \dots + R_{n-1}}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(n)}{n} = 0$$

Tretí dôkaz

Sporom – nech $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p}$ konverguje.

$$\sum_{p \in \mathbb{P}, p > n} \frac{1}{p} < \frac{1}{2}$$
$$\frac{\pi(n!m)}{m} < \frac{1}{2}$$

Tretí dôkaz

Zoberme $T_i = n!i - 1$ pre $i = 1, \dots, m$.

- ▶ $p \mid T_i \Rightarrow p > n$
- ▶ $p \mid T_i \wedge p \mid T_j \Rightarrow p \mid i - j$

$$\sum_{n!m > p > n} \left(\frac{m}{p} + 1 \right) \geq m$$

$$\sum_{p > n} \frac{1}{p} + \frac{\pi(n!m)}{m} \geq 1$$