

Iný dôkaz Cantor-Bernsteinovej vety

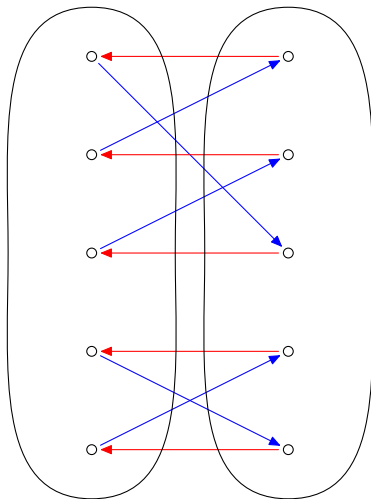
16. októbra 2025

Cantor-Bernsteinova veta

$$|X| \leq |Y| \wedge |Y| \leq |X| \quad \Rightarrow \quad |X| = |Y|.$$

Ak existuje injekcia $f: X \rightarrow Y$ a existuje injekcia $g: Y \rightarrow X$, tak existuje aj bijekcia $h: X \rightarrow Y$.

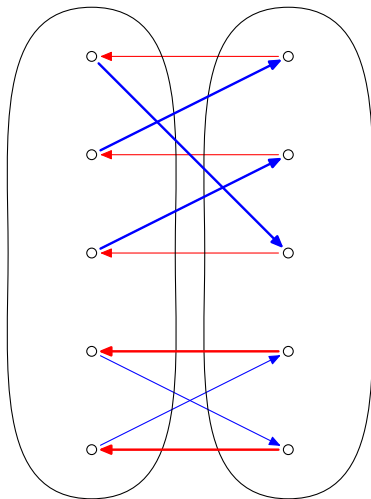
Injekcie dvoma smermi



Injekcie dvoma smermi

- ▶ Máme injekcie dvoma smermi $f: X \rightarrow Y$ a $g: Y \rightarrow X$.
- ▶ Na nájdenie bijekcie $h: X \rightarrow Y$ vieme používať iba f a g .
- ▶ Chceme vybrať niektoré modré a niektoré červené šípky tak, aby spolu tvorili bijekciu.

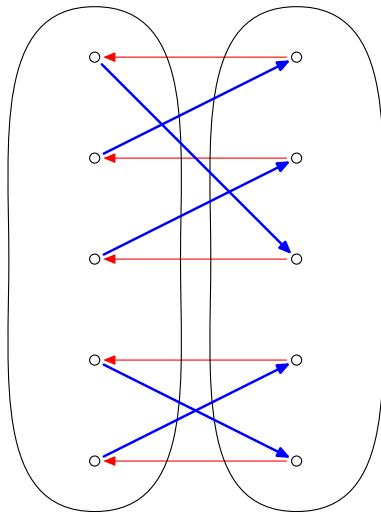
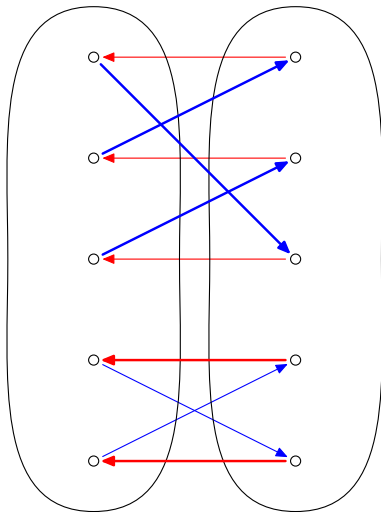
Injekcie dvoma smermi



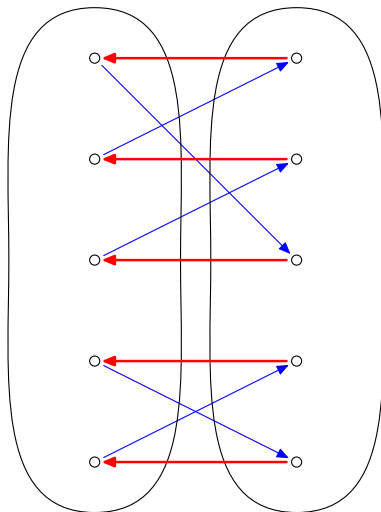
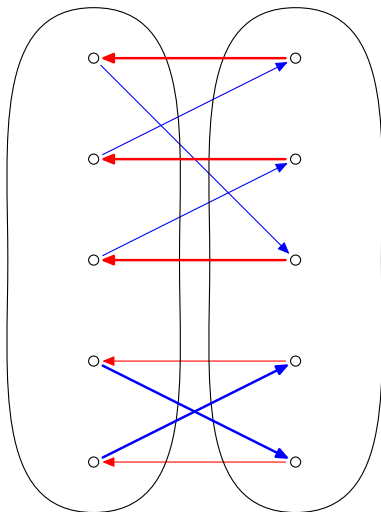
Konečný príklad

- ▶ Máme viacero možností na výber bijekcie h .
- ▶ Konečné príklady sú menej zaujímavé: Ak $|X| = |Y|$, tak ľubovoľná injekcia $X \rightarrow Y$ je súčasne aj bijekcia

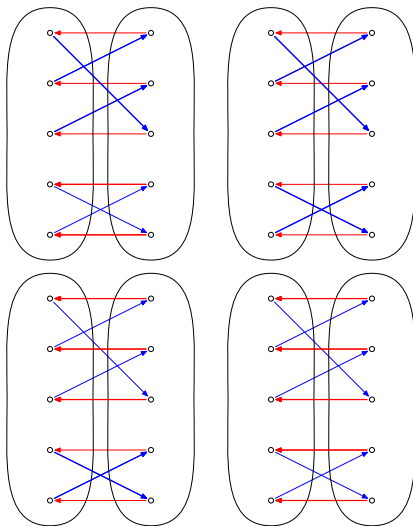
Konečný príklad



Konečný príklad



Konečný príklad



Nekonečný príklad

- ▶ Pozrime sa na nejaké jednoduché príklady ak X, Y sú nekonečné.
- ▶ Skúsme $X = Y = \mathbb{N}$ a $f(x) = g(x) = x + 1$.
- ▶ Mali by sme postupne prísť na to, že v tomto prípade máme jedinú možnosť ako z modrých a červených šípok skombinovať bijekciu.

Nekonečný príklad

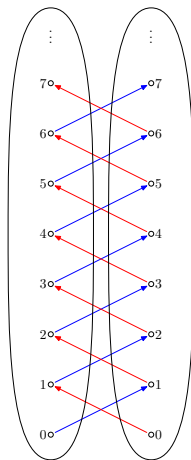
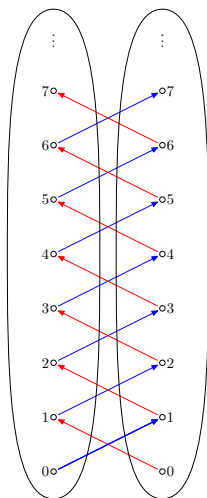
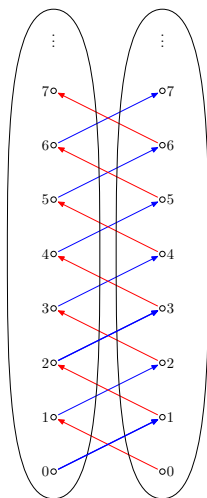


Figure: Injekcie $f(x) = g(x) = x + 1$ pre $X = Y = \mathbb{N}$

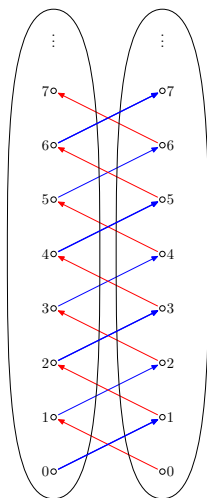
V bode 0 musíme vybrať modrú šípku



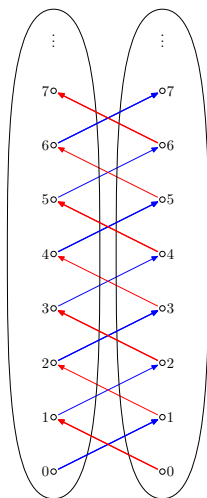
Teraz už máme jedinú možnosť aj v bode 2



Vo všetkých párnych číslach musia byť modré šípky



Bijekcia h je jednoznačne určená



Iný nekonečný príklad

- ▶ Nie vždy to je tak, že h je určené jednoznačne – to sme videli už pri prvom príklade.
- ▶ V konečnom prípade mohla nejednoznačnosť vzniknúť iba v podobe cyklov.
- ▶ V nekonečnom prípade je ešte aj iný problém, ktorý môže viesť k nejednoznačnosti.
- ▶ Skúsme nájsť všetky možnosti pre $X = Y = \mathbb{Z}$ a $f(x) = g(x) = x + 1$.
- ▶ Dve možnosti sú tu očividné: $h = f$ a $h = g^{-1}$.
- ▶ Ak si zvolíme čo vyberieme v niektorých bodoch, je potom už h jednoznačne určené?

Iný nekonečný príklad

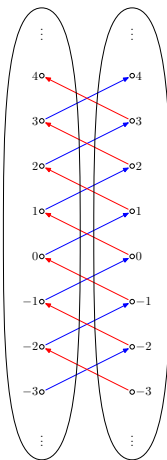
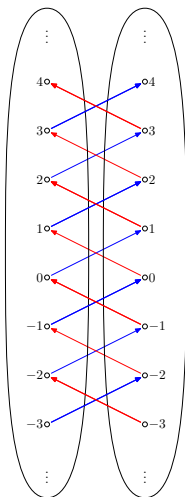
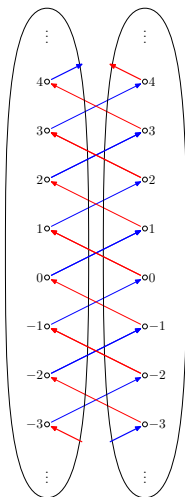


Figure: Injekcie $f(x) = g(x) = x + 1$ pre $X = \mathbb{Z}$

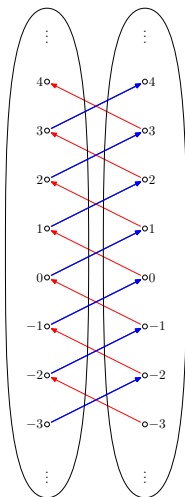
Dostali sme 4 možnosti



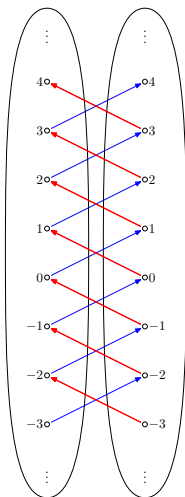
Dostali sme 4 možnosti



Dostali sme 4 možnosti



Dostali sme 4 možnosti



Zhrnutie príkladov

V dôkaze budeme vlastne robiť podobné veci, ako sme videli v týchto príkladoch:

- ▶ Pre niektoré prvky sme mali jedinú možnosť výberu.
- ▶ Boli to napríklad prvky na ktoré sa nič nezobrazí.
- ▶ Ale aj prvky ak sme sa do takéhoto prvku vedeli dostať tak, že sa „vraciam“ po šípkach.
- ▶ Inde sme si mohli vybrať. (Napríklad všade červené šípky.)

Reťazec predchodcov

Majme injekcie $f: X \rightarrow Y$ a $g: Y \rightarrow X$ (modré a červené šípky).
Reťazec predchodcov = vraciame sa z daného bodu množiny X po šípkach.

- ▶ $x_0 \in X$
- ▶ $y_0 \in Y$ také, že $g(y_0) = x_0$ (ak také y_0 existuje, inak skončíme)
- ▶ $x_1 \in X$ také, že $f(x_1) = y_0$ (ak existuje)
- ▶ Postupujeme ďalej indukciou, t.j. v indukčnom kroku vyberáme prvky také, že $g(y_n) = x_n$ a $f(x_{n+1}) = y_n$.
- ▶ Ak prvok s uvedenými vlastnosťami neexistuje, reťazec ukončíme.

Modré prvky

Pre každý prvok $z \in X$ sme dostali nejaký reťazec $(x_0, y_0, x_1, \dots)$.

- ▶ Môže byť nekonečný alebo konečný.
- ▶ Ak je konečný, mohol skončiť v množine X alebo v množine Y .
- ▶ Nazvime prvok $x \in X$ *modrý*, ak je jeho reťazec predchodcov konečný a *končí* v X .
- ▶ Toto sú presne prvky $z \in X$, kde *musíme* vybrať modré šípky.

Bijekcia $h: X \rightarrow Y$

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ak } x \text{ je modré,} \\ y & \text{také, že } g(y) = x; \text{ inak.} \end{cases} \quad (1)$$

- ▶ h je zobrazenie.
- ▶ h je surjekcia.
- ▶ h je injekcia.

Porovnanie s predošlým dôkazom

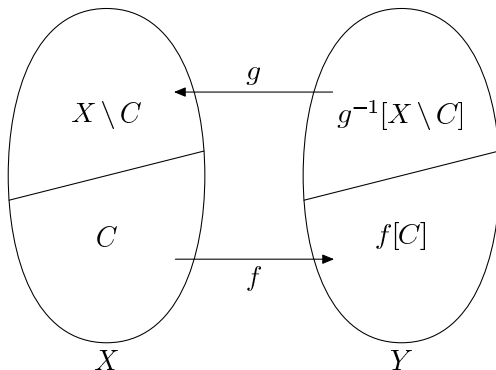


Figure: Ilustrácia k dôkazu Cantor-Bernsteinej vety

Porovnanie s predošlým dôkazom

- ▶ Predošlý dôkaz: Našli sme vhodné $C \subseteq X$, na množine C sme použili f , mimo množiny C sme použili g .
- ▶ To isté sme spravili aj teraz, množina C sú v tomto dôkaze „modré body“.
- ▶ Rozdiel bol v spôsobe, akým sme množinu C našli.

Induktívny dôkaz

$$F(A) = X \setminus g[Y \setminus f[A]]$$

$$A_0 = \emptyset, A_{n+1} = F(A_n) \text{ a}$$

$$C := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$$

Induktívny dôkaz

$$\begin{aligned} F(C) &= F\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = X \setminus g[Y \setminus f[\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n]] = X \setminus g[Y \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} f[A_n]] = \\ &= X \setminus g[\bigcap_{n=1}^{\infty} (Y \setminus f[A_n])] = X \setminus \bigcap_{n=0}^{\infty} g[Y \setminus f[A_n]] = \\ &= \bigcup_{n=0}^{\infty} (X \setminus g[Y \setminus f[A_n]]) = \bigcup_{n=0}^{\infty} F(A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = C. \end{aligned}$$

Vety o pevnom bode

Veta (Knaster-Tarski)

Nech L je úplný zväz a $f: L \rightarrow L$ je monotónne zobrazenie t.j. platí

$$(\forall x, y \in L) f(x) \leq f(y).$$

Potom existuje $c \in L$ také, že platí

$$f(c) = c$$

t.j. existuje pevný bod zobrazenia f .

Vety o pevnom bode

Veta (Kleene)

Nech L je úplný zväz, jeho najmenší prvok označme 0 . Nech $f: L \rightarrow L$ je monotónne zobrazenie, ktoré navyše zachováva supréma, t.j. pre ľubovoľné $\{x_i; i \in I\} \subseteq L$ platí

$$f\left(\sup_{i \in I} x_i\right) = \sup_{i \in I} f(x_i).$$

Nech $c = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n$, kde postupnosť (x_n) je určená indukzívne ako $x_0 = 0$ a

$$f(x_{n+1}) = x_n.$$

Potom platí

$$c = f(c),$$

t.j. c je pevný bod zobrazenia f .

Vety o pevnom bode

Veta (Kleene)

Navyše, toto je najmenší pevný bod zobrazenia f . T.j. ak c' je tiež pevný bod, tak platí $c \leq c'$.

Úplný zväz

- ▶ O (úplných) zväzoch ste sa neučili.
- ▶ Museli by sme najprv stráviť dosť dlhý čas úvodom o čiastočne usporiadaných množinách.
- ▶ Dva príklady zväzov: $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, $(I, \leq)$

Aj ak ste sa neučili o čiastočných usporiadaniach, tak asi vidno že „ $\subseteq$ “ a „ $\leq$ “ majú niektoré podobné vlastnosti

$$A \subseteq A$$

$$(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \Rightarrow (A \subseteq C)$$

$$(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \Rightarrow (A = B)$$

Vety o pevnom bode

Tvrdenie

Nech $F: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ je funkcia taká, že platí

$$A \subseteq B \quad \Rightarrow \quad F(A) \subseteq F(B)$$

pre ľubovoľné $A, B \subseteq X$.

Potom existuje množina C taká, že

$$F(C) = C.$$

Tvrdenie

Nech $I = \langle 0, 1 \rangle$ a $f: I \rightarrow I$ je neklesajúca funkcia. Potom existuje bod $c \in I$ taký, že $f(c) = c$.

Vety o pevnom bode

Tvrdenie

Nech $F: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ je funkcia taká, že platí

$$A \subseteq B \quad \Rightarrow \quad F(A) \subseteq F(B)$$

$$F\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} F(A_i)$$

Ak definujeme $A_0 = \emptyset$ a $A_{n+1} = F(A_n)$, tak pre množinu

$$C = \bigcup_{i=0}^n A_n$$

platí $F(C) = C$.

Navyše, ak $D \subseteq X$ je iná množina s vlastnosťou $F(D) = D$, tak $C \subseteq D$. (Inak povedané, C je najmenší pevný bod funkcie F .)

Vety o pevnom bode

Tvrdenie

Nech $I = \langle 0, 1 \rangle$ $f: I \rightarrow I$ je zobrazenie ktoré je neklesajúce a spojité. Definujme postupnosť a_n rekurentne ako $a_0 = 0$ a

$$a_{n+1} = f(a_n).$$

Potom pre $c = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$ platí

$$f(c) = c.$$

Navyše, c je najmenší pevný bod funkcie f . T.j. ak pre nejaké $d \in I$ platí $f(d) = d$, tak $c \leq d$.