

Komplexné čísla

27. novembra 2025

Komplexné čísla

$$x^2 = -1$$

- ▶ Zdefinujeme množinu $\mathbb{C}$ a na nej operácie $+$, $\cdot$.
- ▶ Bude to rozšírenie reálnych čísel. (T.j. $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ a pre reálne čísla fungujú operácie rovnako.)
- ▶ Bude sa s nimi dať rozumne počítať; $\mathbb{C}$ je pole.
- ▶ V $\mathbb{C}$ bude mať rovnica $x^2 = -1$ riešenie. (V $\mathbb{R}$ riešenie nemá.)
- ▶ Komplexné čísla majú aj veľa ďalších zaujímavých vlastností.

Komplexné čísla

Ideme k reálnym číslam pridať nové číslo také, že

$$i^2 = -1.$$

$$\mathbb{C} = \{a + bi; a, b \in \mathbb{R}\}$$

Komplexné čísla

- ▶ $z = a + bi$ je *algebraický zápis* komplexného čísla
- ▶ Číslo a sa nazýva *reálna časť* komplexného čísla a bi sa nazýva *imaginárna časť* komplexného čísla.
- ▶ Označujeme jeho reálnu časť $\operatorname{Re} z = a$ a imaginárnu časť $\operatorname{Im} z = bi$.
- ▶ Dve komplexné čísla sa rovnajú, ak sa zhoduje reálna aj imaginárna časť.

$$a_1 + b_1i = a_2 + b_2i \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = a_2 \text{ a } b_1 = b_2$$

Rovnosť komplexných čísel

- Dve komplexné čísla sa rovnajú, ak sa zhoduje reálna aj imaginárna časť.

$$a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = a_2 \text{ a } b_1 = b_2$$

- Máme bijekciu $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$a + bi \mapsto (a, b)$$

- Komplexné čísla by sme teda mohli definovať aj ako usporiadané dvojice reálnych čísel.
- Môžeme ich reprezentovať ako body (alebo vektory) v rovine.

Súčet a súčin komplexných čísel

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) &= ac + bci + adi + bdi^2 \\ &= ac + (bc + ad)i - bd \\ &= (ac - bd) + (bc + ad)i\end{aligned}$$

Súčet a súčin komplexných čísel

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Sčítovanie = súčet usporiadaných dvojíc = súčet vektorov v $\mathbb{R}^2$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i$$

Súčet a súčin komplexných čísel

Príklad

$$(2 + 3i) + (2 - i) = 4 + 2i$$

$$(2 + 3i)(2 - i) = 4 - 2i + 6i + 3 = 7 + 4i$$

$$(\sqrt{2} + \sqrt{2}i)(\sqrt{2} + \sqrt{2}i) = 2 + 2i + 2i - 2 = 4i$$

Komplexné čísla obsahujú reálne čísla

- ▶ Komplexné číslo $a + bi$ stotožňujeme s reálnym číslom a .
- ▶ Teda $\mathbb{R} = \{a + 0i; a \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C}$.
- ▶ Operácie fungujú rovnako:

$$(a + 0i) + (b + 0i) = (a + b) + 0i$$

$$(a + 0i)(b + 0i) = ab + 0i$$

Súčet a súčin komplexných čísel

$$\begin{aligned} i^1 &= i & i^2 &= -1 & i^3 &= -i & i^4 &= 1 \\ i^{4k+1} &= i & i^{4k+2} &= -1 & i^{4k+3} &= -i & i^{4k} &= 1 \end{aligned}$$

Komplexné čísla tvoria pole

- ▶ Chceme si rozmyslieť, že s komplexnými číslami sa dá „zmysluplne“ počítať.
- ▶ Stručne sa to dá povedať tak, že $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ je pole.
- ▶ Ak niekto nepozná pojem poľa, tak sa to dá povedať tak, že: Sčítovanie a násobenie komplexných čísel má veľa vlastností podobných ako pre reálne čísla.

Sčítanie aj násobenie sú komutatívne

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

$$(a + bi) + (c + di) = (c + di) + (a + bi)$$

$$(a + c) + (b + d)i = (c + a) + (d + b)i$$

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (c + di) \cdot (a + bi)$$

$$(ac - bd) + (ad + bc)i = (ca - db) + (cb + da)i$$

Sčítanie aj násobenie sú asociatívne

$$\begin{aligned}(a + bi) + [(c + di) + (e + fi)] &= (a + (c + e)) + (b + (d + f))i \\ [(a + bi) + (c + di)] + (e + fi) &= ((a + c) + e) + ((b + d) + f)i \\ z_1 + (z_2 + z_3) &= (z_1 + z_2) + z_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a + bi)[(c + di)(e + fi)] &= (a + bi)[(ce - df) + (cf + de)i] = \\ &= (ace - adf - bcf - bde) + (acf + ade + bce - bdf)i \\ [(a + bi)(c + di)](e + fi) &= [(ac - bd) + (bc + ad)i](e + fi) = \\ &= (ace - bde - bcf - adf) + (acf - bdf + bce + ade)i \\ z_1(z_2 z_3) &= (z_1 z_2)z_3\end{aligned}$$

Distributívnosť

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1z_3 + z_2z_3$$

$$\begin{aligned} z_1(z_2 + z_3) &= (a + bi)[(c + e) + (d + f)i] \\ &= a(c + e) - b(d + f) + a(d + f)i + b(c + e)i \\ &= ac + ae - bd - bf + adi + afi + bci + bei \\ &= (ac - bd + bci + adi) + (ae - bf + afi + bei) \\ &= (a + bi)(c + di) + (a + bi)(e + fi) \\ &= z_1z_3 + z_2z_3 \end{aligned}$$

Neutrálne prvky

$$(0 + 0i) + (c + di) = c + di$$

$$(1 + 0i) \cdot (c + di) = c + di$$

Neutrálne prvky $0 = 0 + 0i$ a $1 = 1 + 0i$ sú rovnaké ako v $\mathbb{R}$.

Inverzný prvok pre sčítovanie

$$\begin{aligned}-(a + bi) &= -a - bi \\(a + bi) + (-a - bi) &= 0 + 0i = 0\end{aligned}$$

- ▶ Sčítovanie je jednoduché.
- ▶ Je to to isté, ako obvyklé sčítovanie usporiadaných dvojíc (po súradniciach).
- ▶ Je to to isté, ako obvyklé sčítovanie vektorov v rovine.
- ▶ Ak sa pozeráme iba na sčítovanie, tak máme izomorfné grupy:

$$(\mathbb{C}, +) \cong (\mathbb{R}, +).$$

Inverzný prvok pre násobenie

Pre $c + di \neq 0 + 0i$, t.j. $c \neq 0$ alebo $d \neq 0$.

$$\frac{1}{c + di} = \frac{1}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} = \frac{c - di}{c^2 + d^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{a + bi}{c + di} &= \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \\ &= \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i \end{aligned}$$

Inverzný prvok pre násobenie

$$\frac{1}{c + di} = \frac{c - di}{c^2 + d^2}$$
$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

$$(c + di) \cdot \frac{c - di}{c^2 + d^2} = \frac{(c + di)(c - di)}{c^2 + d^2} = \frac{c^2 + d^2}{c^2 + d^2} = 1$$

Delenie komplexných čísel

Príklad

$$\frac{1+2i}{2-i} = \frac{(1+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{5i}{5} = i$$

Komplexne združené číslo

Definícia

Komplexne združeným číslom k číslu $z = a + bi$ nazývame číslo $\bar{z} = a - bi$.

Číslo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ nazývame *absolútna hodnota* komplexného čísla z .

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

$$z = \bar{z} \quad \Leftrightarrow \quad z \text{ je reálne}$$

$$z = -\bar{z} \quad \Leftrightarrow \quad z \text{ je rýdzoimaginárne}$$

Komplexné čísla ako body v rovine

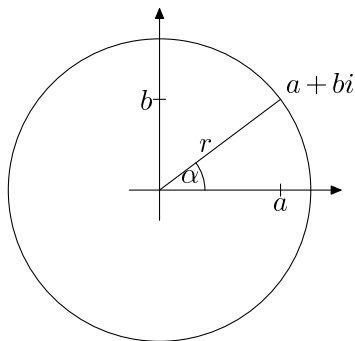


Figure: Znáozornenie komplexného čísla v rovine

Goniometrický tvar

- ▶ Komplexnému číslu $z = a + bi$ zodpovedá bod resp. vektor (a, b) .
- ▶ Vzdialenosť od počiatku:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- ▶ Uhol s reálnou osou: $\cos \varphi = \frac{a}{r}$ a $\sin \varphi = \frac{b}{r}$.
- ▶ Dostaneme potom:

$$a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Goniometrický tvar

Definícia

Zápis komplexného čísla v tvare

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

nazývame *goniometrický zápis* komplexného čísla. Číslo $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ nazývame *absolútna hodnota* alebo tiež *modul* komplexného čísla z a označujeme ho $|z|$. Číslo φ také, že $a = r \cos \varphi$ a $b = r \sin \varphi$ nazývame *argument* komplexného čísla z .

Goniometrický tvar

Príklad

Pre $z = 1 - \sqrt{3}i$ máme $r = |z| = \sqrt{1+3} = 2$.

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}$$

$$\sin \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Dostaneme

$$\varphi = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

Goniometrický tvar

Príklad

Z goniometrického tvaru algebraický:

$$\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) = 1 + i.$$

Moivrova veta

Pri vynásobení dvoch komplexných čísel sa vynásobia ich absolútne hodnoty a ich argumenty sa sčítajú.

Veta (Moivrova veta)

Nech $z_1 = r_1(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ a $z_2 = r_2(\cos \beta + i \sin \beta)$. Potom pre ich súčin platí

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)). \quad (1)$$

Špeciálne z toho vyplýva, že pre absolútne hodnoty platí

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|. \quad (2)$$

Moivrova veta

$$\begin{aligned}|z_1 z_2|^2 &= z_1 z_2 \cdot \overline{z_1 z_2} \\ &= z_1 \overline{z_1} \cdot z_2 \overline{z_2} \\ &= |z_1|^2 \cdot |z_2|^2\end{aligned}$$

Moivrova veta

$$\begin{aligned}|z_1 z_2|^2 &= (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 \\&= (a^2 c^2 - 2abcd + b^2 d^2) + (a^2 d^2 + 2abcd + b^2 c^2) \\&= (ac)^2 + (bd)^2 + (ad)^2 + (bc)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|z_1|^2 \cdot |z_2|^2 &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \\&= (ac)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 + (bd)^2\end{aligned}$$

Moivrova veta

$$\begin{aligned} & (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) = \\ &= (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + i(\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta) = \\ &= \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

Pre $z_1 = r_1(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ a $z_2 = r_2(\cos \beta + i \sin \beta)$ máme

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)).$$

Mocniny

Dôsledok

Ak $n \in \mathbb{N}$ a $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, tak

$$z^n = r^n (\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha))$$

Mocniny

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} i^{n-j} \cos^j \alpha \sin^{n-j} \alpha$$

$$\cos nx = \cos^n x - \binom{n}{2} \cos^{n-2} x \sin^2 x + \binom{n}{4} \cos^{n-4} x \sin^4 x - \dots$$

$$\sin nx = n \cos^{n-1} x \sin x - \binom{n}{3} \cos^{n-3} x \sin^3 x + \binom{n}{5} \cos^{n-5} x \sin^5 x - \dots$$

Mocniny

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin 2x = 2 \cos x \sin x$$

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x$$

$$\sin 3x = 3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x$$

$$\cos 4x = \cos^4 x - 6 \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x$$

$$\sin 4x = 4 \cos^3 x \sin x - 4 \cos x \sin^3 x$$

$$\cos 5x = \cos^5 x - 10 \cos^3 x \sin^2 x + 5 \cos x \sin^4 x$$

$$\sin 5x = 5 \cos^4 x \sin x - 10 \cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x$$

$$\cos 6x = \cos^6 x - 15 \cos^4 x \sin^2 x + 15 \cos^2 x \sin^4 x - \sin^6 x$$

$$\sin 6x = 6 \cos^5 x \sin x - 20 \cos^3 x \sin^3 x + 6 \cos x \sin^5 x$$

„Odmocniny“ zo záporného čísla

Vieme riešiť $x^2 = r$ aj pre $r \in \mathbb{R}$, $r < 0$.

$$x^2 = -a^2$$

$$x^2 + a^2 = 0$$

$$(x - ia)(x + ia) = 0$$

$$x = \pm ia$$

Kvadratické rovnice s reálnymi koeficientmi

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = 0$$

$$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$(2a)^2 \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = b^2 - 4ac$$

$$z^2 = D = b^2 - 4ac$$

Kvadratické rovnice s reálnymi koeficientmi

Pre $D \geq 0$ (reálny prípad):

$$(2a)^2 \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = b^2 - 4ac$$

$$2a \left(x + \frac{b}{2a}\right) = \pm \sqrt{D}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$x = \frac{-b + \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Kvadratické rovnice s reálnymi koeficientmi

$$2a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = b^2 - 4ac$$

Pre $D < 0$ potrebujeme riešiť $z^2 = -(\sqrt{-D})^2$, teda

$$z_{1,2} = \pm i\sqrt{-D}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a}$$

Kvadratické rovnice s reálnymi koeficientmi

Pre $D < 0$:

$$(2a)^2 \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = b^2 - 4ac$$

$$2a \left(x + \frac{b}{2a}\right) = \pm \sqrt{-D}i$$

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm \sqrt{-D}i}{2a}$$

$$x = \frac{-b + \pm \sqrt{-D}i}{2a}$$

Kvadratické rovnice s reálnymi koeficientmi

Príklad

Riešme rovnicu $x^2 + 4x + 5 = 0$.

Dostaneme $D = 16 - 20 = -4$ a

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = -2 \pm i.$$

$$(-2 + i) + (-2 - i) = -4$$

$$(-2 + i)(-2 - i) = 5$$

Kvadratické rovnice s komplexnými koeficientami

- ▶ Čo ak sú $a, b, c \in \mathbb{C}$ (nie nutne reálne)?
- ▶ Stále potrebujeme riešiť $z^2 = D$ pre $D = b^2 - 4ac$.
- ▶ Teraz je D nejaké komplexné číslo.

Binomické rovnice

Chceme riešiť

$$x^n = z$$

pre dané $z \in \mathbb{C}$ a $n \in \mathbb{N}$.

Binomické rovnice

$$x^n = z$$

$$r^n (\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha)) = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$r = \sqrt[n]{|z|}$$

$$\alpha = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k}{n}\pi$$

pre $k = 0, \dots, n-1$.

Binomické rovnice

Príklad

$$x^4 = 1$$

$$x^4 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$r^4 (\cos 4\varphi + i \sin 4\varphi) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$r^4 = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[8]{2}$$

$$4\varphi = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}$$

Riešenia: $x = \sqrt[8]{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}\right) \right)$ pre $k = 0, 1, 2, 3$.

Kvadratické rovnice

$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

Tu $\sqrt{D}$ chápeme tak, že zaň možno dosadiť ktorúkoľvek z druhých odmocnín čísla D . (T.j. ktorékoľvek riešenie rovnice $x^2 = D$.)

Kvadratické rovnice

Príklad

$$x^2 - (1 + i)x - 2 - i = 0$$

Základná veta algebry

Veta (Základná veta algebry)

Každý nenulový polynóm s komplexnými koeficientami má koreň v $\mathbb{C}$. T.j. ak

$$f(x) = c_n x^n + \dots + c_1 x + c_0,$$

pričom $c_n \neq 0$, tak existuje $z \in \mathbb{C}$ také, že $f(z) = 0$.

Exponenciálny tvar komplexného čísla

$$re^{ix} = r(\cos x + i \sin x)$$

$$re^{i(x+y)} = re^{ix} \cdot e^{iy}$$

Exponenciálny tvar komplexného čísla

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} + \dots$$

$$e^{it} = 1 + it - \frac{t^2}{2} - \frac{it^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{it^5}{5!} + \dots$$

$$e^{it} = \left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \dots\right) + i \left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \dots\right)$$

Kvaternióny

Komplexné čísla sa nedajú usporiadať