

Homeomorfizmy

8. októbra 2025

Definícia homeomorfizmu

Definícia

Zobrazenie $h: X \rightarrow Y$ medzi topologickými priestormi $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ sa nazýva *homeomorfizmus*, ak h je bijektívne, spojité a aj f^{-1} je spojité.

$$U \in \mathcal{T}_X \Leftrightarrow h[U] \in \mathcal{T}_Y$$

$$V \in \mathcal{T}_Y \Leftrightarrow h^{-1}[V] \in \mathcal{T}_X$$

Homeomorfné priestory

Definícia

Topologické priestory $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ nazveme *homeomorfné*, ak existuje homeomorfizmus $h: X \rightarrow Y$.

Označenie: $(X, \mathcal{T}_X) \cong (Y, \mathcal{T}_Y)$ alebo stručnejšie $X \cong Y$.

- ▶ $X \cong X$;
- ▶ $X \cong Y \Rightarrow Y \cong X$
- ▶ $X \cong Y \wedge Y \cong Z \Rightarrow X \cong Z$

Topologické vlastnosti

Definícia

Vlastnosť P topologických priestorov sa nazýva *topologická vlastnosť*, ak pre ľubovoľné dva priestory X a Y , ktoré sú homeomorfné, platí že X má vlastnosť P práve vtedy, keď Y má vlastnosť P .

Termín topologická vlastnosť teda používame pre vlastnosti, ktoré sa prenášajú homeomorfizmami.

Intervaly

- ▶ $\langle a, b \rangle \cong \langle c, d \rangle$
- ▶ $(a, b) \cong (c, d)$
- ▶ $\langle 0, 1 \rangle \not\cong (0, 1)$ resp. $\langle 0, 1 \rangle \not\cong \mathbb{R}$

Intervaly a $\mathbb{R}$

$$(0, 1) \cong (a, b) \cong (a, \infty) \cong (-\infty, b) \cong \mathbb{R}$$

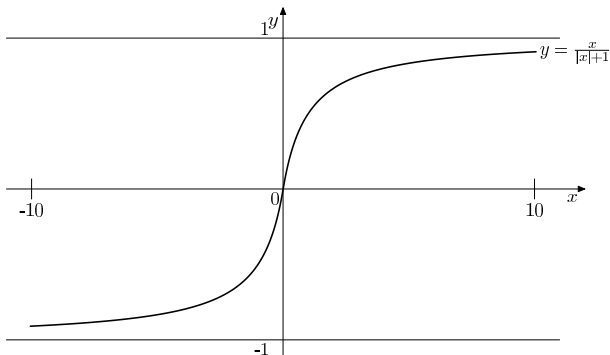


Figure: Príklad homeomorfizmu medzi $\mathbb{R}$ a $(-1, 1)$

Interval a kružnica

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$$

$$(0, 1) \cong S \setminus \{x_0\}$$

$$h: (0, 2\pi) \rightarrow S \setminus \{(1, 0)\}$$

$$h(t) = (\cos t, \sin t)$$

$$d(h(t_1), h(t_2)) = \left| 2 \sin \frac{t_1 - t_2}{2} \right|$$

Interval a kružnica

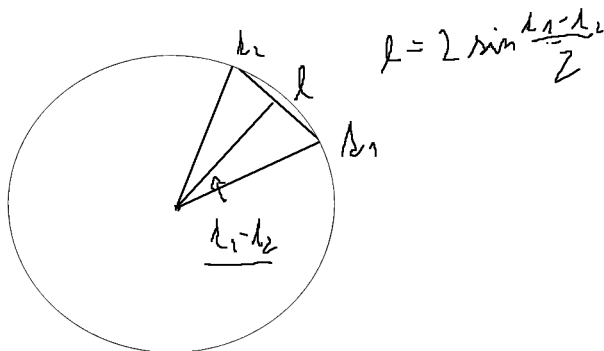
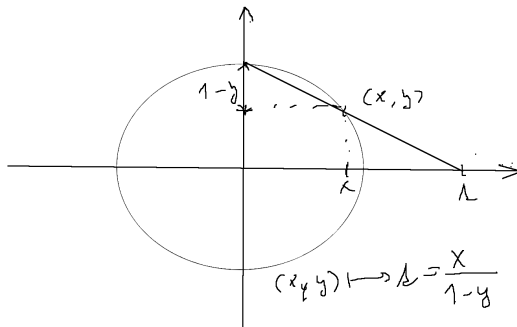


Figure: Vzdialenosť dvoch bodov na kružnici.

Stereografická projekcia

$$S \setminus \{x_0\} \cong \mathbb{R}$$



$$(x, y) \mapsto \frac{x}{1-y}$$

Stereografická projekcia

$$\begin{aligned} S \setminus \{(0, 1)\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \frac{x}{1 - y} \\ t &\mapsto \left(\frac{2t}{t^2 + 1}, \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \right) \end{aligned}$$

Stereografická projekcia

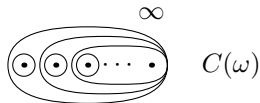
$$(x, y) \mapsto \frac{x}{1-y}$$

$$(x, y, z) \mapsto \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right)$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \left(\frac{x_1}{1-x_n}, \frac{x_2}{1-x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{1-x_n} \right)$$

Priestor $C(\omega)$

- ▶ $X = \{0, 1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$
- ▶ $\mathcal{B}_x = \{\{x\}\}$ pre $x \neq \infty$
- ▶ $\mathcal{B}_\infty =$ doplnky konečných množín



$$C(\omega) \cong \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

Otvorené a uzavreté zobrazenia

Definícia

Nech $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ sú topologické priestory, $f: X \rightarrow Y$ je zobrazenie.

Zobrazenie f je *otvorené*, ak pre každú otvorenú množinu $U \in \mathcal{T}_X$ je jej obraz $f[U]$ otvorená množina v priestore Y .

Zobrazenie f je *uzavreté*, ak pre každú uzavretú podmnožinu C priestoru X je aj $f[C]$ uzavretá (množina v priestore Y).

Na to, aby bolo zobrazenie otvorené, stačí aby boli otvorené obrazy báзовých množín

Otvorené a uzavreté zobrazenia

Tvrdenie

Nech $f: (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ je bijekcia. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

- a) Zobrazenie f je otvorené.*
- b) Zobrazenie f je uzavreté.*
- c) Zobrazenie f^{-1} je spojité.*

Otvorené a uzavreté zobrazenia

Dôsledok

Nech $f: X \rightarrow Y$ je zobrazenie medzi topologickými priestormi.

Potom platí:

- a) Zobrazenie f je homeomorfizmus práve vtedy, keď f je bijektívne, spojité a otvorené.*
- b) Zobrazenie f je homeomorfizmus práve vtedy, keď f je bijektívne, spojité a uzavreté.*