

Konvergenca postupností

21. októbra 2025

Definícia limity

Definícia

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor a $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť bodov z X . Potom a je *limita postupnosti* $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ práve vtedy, keď pre každé otvorené okolie U bodu a existuje n_0 také, že $x_n \in U$ pre ľubovoľné $n \geq n_0$.

$$(\forall U \in \mathcal{O}_a)(\exists n_0)(n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in U) \quad (1)$$

Budeme používať označenie $a \in \lim x_n$ alebo tiež $x_n \rightarrow a$.

Definícia limity

$$(\forall U \in \mathcal{O}_a)(\exists n_0)(n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in U)$$

$$(\forall U \in \mathcal{O}_a)(\exists n_0)(\langle n_0, \infty \rangle \subseteq x^{-1}[U]) \quad (2)$$

Jednoznačnosť limity

Tvrdenie

Ak X je hausdorffovský priestor, tak ľubovoľná postupnosť v X má nanajvýš jednu limitu.

Prvá axióma spočítateľnosti

Lema

Nech X je topologický priestor a $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť bodov z $A \subseteq X$. Ak a je limita postupnosti $(x_n)_{n=0}^{\infty}$, tak $a \in \overline{A}$.

$$(\forall n) x_n \in A \wedge x_n \rightarrow a \Rightarrow a \in \overline{A}$$

Špeciálne, ak $A = \{x_n; n = 0, 1, 2, \dots\}$ a $x_n \rightarrow a$, tak $a \in \overline{A}$.

$$x_n \rightarrow a \Rightarrow a \in \overline{\{x_n; n = 0, 1, 2, \dots\}}$$

Dôsledok

Nech X je topologický priestor a $C \subseteq X$ je uzavretá množina. Ak $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť bodov z C a a je limita tejto postupnosti, tak platí aj $a \in C$.

Prvá axióma spočítateľnosti

Tvrdenie

Nech X je priestor vyhovujúci prvej axióme spočítateľnosti. Nech $a \in X$ a $A \subseteq X$. Potom $a \in \overline{A}$ práve vtedy, keď existuje postupnosť $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ taká, že $x_n \rightarrow a$ a všetky členy tejto postupnosti ležia v A .

Tvrdenie

Nech X je priestor vyhovujúci prvej axióme spočítateľnosti a $C \subseteq X$. Množina C je uzavretá práve vtedy, keď pre každú postupnosť $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ prvkov z C platí, že ak a je limita tejto postupnosti, tak $a \in C$.

Prvá axióma spočítateľnosti

Definícia

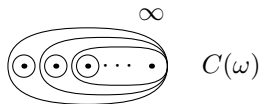
Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor a $C \subseteq X$. Množina C je *sekvenciálne uzavretá*, ak pre každú konvergentnú postupnosť prvkov z C patrí do C aj jej limita.

$$((\forall n \in \mathbb{N}) x_n \in C) \wedge (x_n \rightarrow a) \Rightarrow a \in C$$

- ▶ uzavretá $\Rightarrow$ sekvenciálne uzavretá
- ▶ Prvá axióma spočítateľnosti: sekvenciálne uzavretá $\Rightarrow$ uzavretá

Priestor $C(\omega)$

- ▶ $X = \{0, 1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$
- ▶ $\mathcal{B}_x = \{\{x\}\}$ pre $x \neq \infty$
- ▶ $\mathcal{B}_\infty =$ doplnky konečných množín



$$C(\omega) \cong \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

Priestor $C(\omega)$

$$\bar{x}(n) = \begin{cases} x_n & \text{ak } n \in \mathbb{N}, \\ a & \text{ak } n = \infty. \end{cases}$$

$$x_n \rightarrow a \quad \Leftrightarrow \quad \bar{x} \text{ je spojité}$$

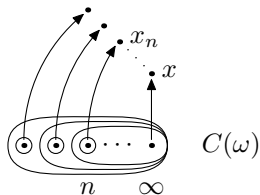
Priestor $C(\omega)$ 

Figure: Súvis priestoru $C(\omega)$ s konvergenciou postupností

Priestor $C(\omega)$

$$n_k \rightarrow \infty$$

$$(\forall N \in \mathbb{N})(\exists k_0 \in \mathbb{N})(k > k_0 \Rightarrow n_k \geq N).$$

Sekvenciálna spojitosť

Definícia

Nech X, Y sú topologické priestory a $f: X \rightarrow Y$ je zobrazenie. Hovoríme, že zobrazenie f je *sekvenciálne spojité*, ak pre ľubovoľnú postupnosť $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ v priestore X z $x_n \rightarrow a$ vyplýva $f(x_n) \rightarrow f(a)$. (T.j. ak postupnosť $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ konverguje k a , tak postupnosť $(f(x_n))_{n=0}^{\infty}$ konverguje k $f(a)$.)

$$x_n \rightarrow a \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \rightarrow f(a)$$

Sekvenciálna spojitosť

Tvrdenie

Nech X, Y sú topologické priestory a $f: X \rightarrow Y$ je zobrazenie. Ak f je spojité, tak f je sekvenciálne spojité.

Tvrdenie

Nech X, Y sú topologické priestory a navyše X spĺňa prvú axiómu spočítateľnosti. Ak zobrazenie $f: X \rightarrow Y$ je sekvenciálne spojité, tak je aj spojité.

Podpostupnosti, hromadné body

Definícia

Nech $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť bodov topologického priestoru X . Bod $a \in X$ je *hromadný bod* ak pre ľubovoľné okolie U bodu a a pre ľubovoľné $n_0 \in \mathbb{N}$ existuje $n \geq n_0$ také, že $x_n \in U$.

$$(\forall U \in \mathcal{O}_a)(\forall n_0 \in \mathbb{N})(\langle n_0, \infty \rangle \cap x^{-1}[U] \neq \emptyset) \quad (3)$$

Lema

Nech X je topologický priestor. Ak a je limita postupnosti $(x_n)_{n=0}^{\infty}$, tak a je aj hromadný bod tejto postupnosti.

Priestor $\{0, 1\}^{\mathbb{R}}$

$$\chi_M(x) = \begin{cases} 1 & \text{ak } x \in M, \\ 0 & \text{ak } x \notin M. \end{cases}$$

$$\chi_{M_n} \rightarrow \chi_M \quad \Rightarrow \quad M \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n. \quad (4)$$

Priestor $\{0, 1\}^{\mathbb{R}}$

$$A = \{\chi_F; F \text{ je konečná podmnožina } \mathbb{R}\}$$

$$B = \{\chi_C; C \text{ je spočítateľná}\}$$

- ▶ $\chi_{\mathbb{R}} \in \overline{A}$
- ▶ Nemám postupnosť konvergujúcu $\chi_{\mathbb{R}}$.
- ▶ B nie je uzavretá, ale je sekvenciálne uzavretá.

$$U_F = \{f \in X; (\forall x \in F) f(x) = 1\}$$

Priestor $\omega_1 + 1$

$$\omega_1 \in \overline{\omega_1}$$