

Regulárne a úplne regulárne priestory

29. októbra 2025

Regulárne priestory

Definícia

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor. Priestor X nazývame *regulárny*, ak pre ľubovoľný bod $b \in X$ a ľubovoľnú uzavretú množinu C takú, že $b \notin C$, existujú disjunktné otvorené množiny U, V tak, že $b \in U$ a $C \subseteq V$.

Regulárny priestor, ktorý je navyše T_1 , nazveme T_3 -priestor.

- ▶ Ekvivalentnú definíciu T_3 -priestoru dostaneme, ak namiesto T_1 požadujeme T_2 .
- ▶ Ak X je T_3 -priestor, tak X je hausdorffovský.

Regulárne priestory

Tvrdenie

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor a $\mathcal{B}$ je nejaká báza topológie $\mathcal{T}$. Priestor $(X, \mathcal{T})$ je regulárny práve vtedy, keď pre ľubovoľný bod $b \in X$ a pre ľubovoľné bazové okolie $V \ni b$, $V \in \mathcal{B}$, existuje bazová množina $U \in \mathcal{B}$ taká, že $b \in U \subseteq \overline{U} \subseteq V$.

$$\left(\bigvee_{V \ni b} V \in \mathcal{B} \right) (\exists U \in \mathcal{B}) (b \in U \subseteq \overline{U} \subseteq V) \quad (1)$$

Dôsledok

Nech X je topologický priestor. Priestor X je regulárny práve vtedy, keď každý bod x má bázu okolí pozostávajúcu z uzavretých množín.

Regulárne priestory

Tvrdenie

Nech $\mathcal{S}$ je subbáza topologického priestoru X . Priestor X je regulárny ak pre ľubovoľný bod $b \in X$ a pre každé jeho subbázové okolie V , t.j. pre $b \in V \in \mathcal{S}$, existuje otvorená množina U taká, že $b \in U \subseteq \overline{U} \subseteq V$

$$\left(\bigvee_{V \ni b} V \in \mathcal{S} \right) (\exists U \in \mathcal{T}) (b \in U \subseteq \overline{U} \subseteq V) \quad (2)$$

Regulárne priestory

Tvrdenie

Ak X je regulárny priestor a S je jeho podpriestor, tak aj S je regulárny.

Ak X je T_3 -priestor, tak aj každý jeho podpriestor je T_3 .

Regulárne priestory

Tvrdenie

Ak X_i je regulárny priestor pre každé $i \in I$, tak aj topologický súčin

$\prod_{i \in I} X_i$ je regulárny.

Ak všetky X_i sú T_3 -priestory, tak aj $\prod_{i \in I} X_i$ je T_3 -priestor.

Ekvivalentná podmienka k spojitosti:

$$\overline{f^{-1}[B]} \subseteq f^{-1}[\overline{B}]$$

Regulárne priestory

$$T_3 \Rightarrow T_2$$

$$T_2 \not\Rightarrow T_3$$

Príklad

Príklad Hausdorffovského priestoru, ktorý nie je regulárny: Na množine $\mathbb{R}$ topológia zadaná tak, že báza okolí nuly pozostáva z množín $(-\varepsilon, \varepsilon) \setminus C$, kde $C = \{\frac{1}{n+1}; n \in \mathbb{N}\}$. (Ostatné body majú bázu okolí ako v euklidovskej topológii.) Bod 0 a uzavretá množina C sa nedajú oddeliť otvorenými množinami.

Úplne regulárne a tichonovovské priestory

Definícia

Topologický priestor X sa nazýva *úplne regulárny*, ak pre ľubovoľný bod $b \in X$ a uzavretú množinu $C \subseteq X$ takú, že $b \notin C$ existuje spojitú zobrazenie $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ také, že $f(b) = 1$ a $f|_C = 0$.

Úplne regulárny T_1 -priestor nazývame $T_{3\frac{1}{2}}$ -priestor alebo tiež *tichonovovský priestor*.

Ekvivalentnú definíciu by sme dostali, ak by sme požadovali zobrazenie do $I = \langle 0, 1 \rangle$ namiesto do $\mathbb{R}$.

Úplne regulárne a tichonovovské priestory

- ▶ Máme spojité zobrazenie $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ také, že $f(b) = 1$ a $f|_C = 0$.
- ▶ Potom vieme dostať $g: X \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ s tými istými vlastnosťami.

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{ak } f(x) < 0, \\ 1 & \text{ak } f(x) > 1, \\ f(x) & \text{inak,} \end{cases}$$

$$g = \max(0, \min(f, 1))$$

Úplne regulárne a tichonovské priestory

Ak $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ sú spojité zobrazenia, tak aj zobrazenia $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ sú spojité.

Zloženie spojitých zobrazení:

$$\langle f, g \rangle: X \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$\max: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Úplne regulárne a tichonovovské priestory

Príklad

Každý metrizable priestor je tichonovovský priestor.

Ak máme bod b a uzavretú množinu také, že $b \notin C$:

$$f(x) = \frac{d(x, C)}{d(b, C)}$$

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a); a \in A\}$$

$$x \in \overline{A} \quad \Leftrightarrow \quad d(x, A) = 0$$

Úplne regulárne a tichonovovské priestory

Tvrdenie

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor a $\mathcal{S}$ je nejaká subbáza topológie $\mathcal{T}$. Priestor $(X, \mathcal{T})$ je úplne regulárny práve vtedy, keď pre každý bod b a pre každé okolie V také, že $b \in V \in \mathcal{S}$ existuje funkcia $f: X \rightarrow I$ taká, že

$$f(b) = 1 \quad \text{a} \quad f|_{X \setminus V} = 0.$$

Úplne regulárne a tichonovovské priestory

Tvrdenie

*Každý podpriestor úplne regulárneho priestoru je úplne regulárny.
Každý podpriestor $T_{3\frac{1}{2}}$ -priestoru je $T_{3\frac{1}{2}}$ -priestor.*

Tvrdenie

Súčin ľubovoľného systému úplne regulárnych priestorov je úplne regulárny. Súčin $T_{3\frac{1}{2}}$ -priestorov je $T_{3\frac{1}{2}}$ -priestor.

Tichonovove kocky

Definícia

Označme ako $I = \langle 0, 1 \rangle$ jednotkový interval s obvyklou topológiou. Ľubovoľnú mocninu I^A tohoto priestoru nazývame *Tichonovova kocka*.

Veta

Nech X je topologický priestor. Priestor X je $T_{3\frac{1}{2}}$ -priestor práve vtedy, keď X je homeomorfný s podpriestorom nejakej Tichonovovej kocky I^A .

Tichonovove kocky a kompaktnosť

Neskôr bude (do istej miery) podobný výsledok pre kompaktnosť:

- ▶ Priestor X je úplne regulárny T_2 -priestor $\Leftrightarrow X$ je homeomorfný s podpriestorom priestoru $\langle 0, 1 \rangle^A$ (pre nejaké A).
- ▶ Priestor X je kompaktný T_2 -priestor $\Leftrightarrow X$ je homeomorfný s **uzavretým** podpriestorom priestoru $\langle 0, 1 \rangle^A$ (pre nejaké A).