

Kompaktnost

3. decembra 2025

Kompaktné priestory

Definícia

Ak $\mathcal{C}$ je pokrytie priestoru X , tak systém $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C}$ sa nazýva *podpokrytie* pokrytia $\mathcal{C}$, ak aj $\mathcal{S}$ je pokrytím t.j. ak $\bigcup \mathcal{S} = X$.

Definícia

Topologický priestor X sa nazýva *kompaktný*, ak pre každé otvorené pokrytie priestoru X existuje konečné podpokrytie.

Podmnožinu K v topologickom priestore X nazveme *kompaktnou*, ak K s relatívnou topológiou je kompaktný priestor. (Ekvivalentne: Ľubovoľné pokrytie množiny K otvorenými podmnožinami priestoru X má konečné podpokrytie.)

Príklady

Definícia

Topologický priestor X sa nazýva *kompaktný*, ak pre každé otvorené pokrytie priestoru X existuje konečné podpokrytie.

- ▶ Každý konečný priestor je kompaktný.
- ▶ Priestory $\mathbb{R}$ a $(0, 1)$ nie sú kompaktné.

Tvrdenie

*Interval $I = \langle 0, 1 \rangle$ s obvyklou topológiou je kompaktný.
Každý uzavretý interval $\langle a, b \rangle$, kde $a < b$, je kompaktný.*

Interval $I = \langle 0, 1 \rangle$

Tvrdenie

Interval $I = \langle 0, 1 \rangle$ s obvyklou topológiou je kompaktný.

- ▶ Dôkaz - „posúvaním sa“ doprava (indukcia na reálnej osi).
 $S = \{x \in \langle 0, 1 \rangle; \text{existuje konečný podsystém } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{C} \text{ taký, že } \langle 0, x \rangle \subseteq \bigcup \mathcal{F}\}$
- ▶ Dôkaz pomocou Alexandrovej vety o subbáze.
- ▶ Spojitý obraz $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ (cez binárne rozvoje).

Charakterizácia pomocou uzavretých množín

Definícia

Nech X je množina a $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Hovoríme, že $\mathcal{S}$ je *centrovaný systém* ak každý konečný konečný podsystem má neprázdny prienik.

T.j. ak $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}$ je konečná množina, tak $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$.

Inak: Ak $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{S}$, tak

$$\bigcap_{i=1}^n A_i \neq \emptyset.$$

Veta

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor. Priestor X je kompaktný práve vtedy, keď každý centrovaný systém uzavretých množín má neprázdny prienik.

Charakterizácia pomocou uzavretých množín

X je *kompaktný*, ak pre každé otvorené pokrytie priestoru X existuje konečné podpokrytie.

Veta

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor. Priestor X je kompaktný práve vtedy, keď každý centrovany systém uzavretých množín má neprázdny prienik.

Podpriestory

Tvrdenie

Ak X je kompaktný priestor a S je jeho uzavretý podpriestor, tak aj S je kompaktný.

Tvrdenie

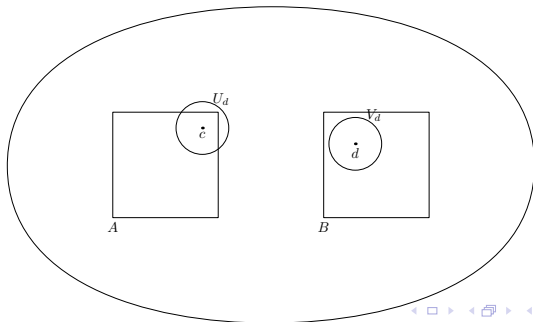
Ak S je podpriestor priestoru X , pričom S je kompaktný a X je Hausdorffovský, tak S je uzavretý podpriestor.

Podpriestory

Tvrdenie

Nech X je hausdorffovský priestor, K je kompaktná podmnožina priestoru X a $x \notin K$. Potom existujú disjunktné množiny U, V také, že $U \cap V = \emptyset$ a súčasne

$$x \in U \quad \text{a} \quad K \subseteq V.$$



Podpriestory

Tvrdenie

Nech X je hausdorffovský priestor, K je kompaktná podmnožina priestoru X a $x \notin K$. Potom existujú disjunktné množiny U, V také, že $U \cap V = \emptyset$ a súčasne

$$x \in U \quad \text{a} \quad K \subseteq V.$$

Tvrdenie

Ak S je podpriestor priestoru X , pričom S je kompaktný a X je Hausdorffovský, tak S je uzavretý podpriestor.

Kompaktný T_2 -priestor je normálny

Veta

Nech X je hausdorffovský priestor a $A, B \subseteq X$ sú kompaktné podmnožiny také, že $A \cap B = \emptyset$. Potom existujú otvorené množiny U, V také, že $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ a $U \cap V = \emptyset$.

Dôsledok

Každý kompaktný T_2 -priestor je normálny. (Teda je to T_4 -priestor.)

Dôsledok

Každý podpriestor kompaktného T_2 -priestoru je $T_{3\frac{1}{2}}$ -priestor.

Kompaktnosť a (ultra)filtre

Tvrdenie

Nech X je topologický priestor, $\mathcal{U}$ je ultrafilter na množine M a $f: M \rightarrow X$ je zobrazenie. Ak X je kompaktný priestor, tak existuje $\mathcal{U}$ -limita funkcie f .

Dôsledok

Nech X je topologický priestor a $\mathcal{U}$ je ultrafilter na množine X . Ak X je kompaktný priestor, tak existuje aspoň jedna limita ultrafiltra $\mathcal{U}$.

Dôsledok

Nech X je topologický priestor a $\mathcal{F}$ je filter na množine X . Ak X je kompaktný priestor, tak $\mathcal{F}$ má hromadný bod v X .

Kompaktnosť a (ultra)filtre

Tvrdenie

Nech X je topologický priestor. Ak každý filter na množine X má hromadný bod, tak X je kompaktný.

Veta

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

- (i) Priestor X je kompaktný.*
- (ii) Pre ľubovoľnú množinu M , ľubovoľné zobrazenie $f: M \rightarrow X$ a každý ultrafilter $\mathcal{U}$ na množine M existuje $\mathcal{U}$ -limita.*
- (iii) Každý ultrafilter na X konverguje.*
- (iv) Každý filter na X má hromadný bod.*

Kompaktnosť a siete

Tvrdenie

Ak X je kompaktný priestor, tak ľubovoľná sieť $(x_d)_{d \in D}$ v X má hromadný bod.

$$\bigcap_{d \in D} \overline{\{x_e; e \in D, e \geq d\}}.$$

Kompaktnosť a siete

Tvrdenie

Nech X je topologický priestor. Ak každá sieť $(x_d)_{d \in D}$ v X má hromadný bod, tak X je kompaktný.

Kompaktnosť a siete

Veta

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

- (i) Priestor X je kompaktný.*
- (ii) Pre ľubovoľnú sieť v X existuje konvergentná podsieť.*
- (iii) Každá sieť v X má hromadný bod.*

Kofinálne podsiete nestačia

Príklad

- ▶ Priestor $X = \{0, 1\}^C$, kde $C = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.
- ▶ Máme projekcie $p_n: C \rightarrow \{0, 1\}$ pre každé $n \in \mathbb{N}$.
- ▶ $(p_n)_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť prvkov z X .
- ▶ Táto postupnosť nemá konvergentnú podpostupnosť.

$$p_i(c_0) = \begin{cases} 1 & \text{ak } i = n_{2k}, \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

Spojité obraz

Veta

Spojité obraz kompaktného priestoru je kompaktný.

- ▶ Ak $\mathcal{C}$ je otvorené pokrytie priestoru Y , tak

$$\mathcal{C}' = \{f^{-1}[U]; U \in \mathcal{C}\}$$

je otvorené pokrytie priestoru X .

- ▶ X je kompaktný $\Rightarrow \mathcal{C}'$ má konečné podpokrytie.

$$X = \bigcup_{k=1}^n f^{-1}[U_k]$$

$$Y = f[X] = f\left[\bigcup_{k=1}^n f^{-1}[U_k]\right] = \bigcup_{k=1}^n f[f^{-1}[U_k]] = \bigcup_{k=1}^n U_k$$

Spojité obraz

Veta

Spojité obraz kompaktného priestoru je kompaktný.

Dôsledok

Nech X je kompaktný topologický priestor, Y je Hausdorffovský a $f: X \rightarrow Y$ je spojitý zobrazenie. Potom f je aj uzavreté zobrazenie.

Dôsledok

Nech X je kompaktný topologický priestor, Y je Hausdorffovský. Ak $f: X \rightarrow Y$ je spojitá bijekcia, tak f je homeomorfizmus.

Dôsledok

Nech X je kompaktný priestor a $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitý zobrazenie. Potom množina $f[X]$ má maximum a minimum.

Tichonovova veta

Veta (Tichonovova veta)

Ak pre každé $i \in I$ je X_i kompaktný priestor, tak aj topologický súčin $\prod_{i \in I} X_i$ je kompaktný.

Tichonovova veta

Veta (Tichonovova veta)

Ak pre každé $i \in I$ je X_i kompaktný priestor, tak aj topologický súčin $\prod_{i \in I} X_i$ je kompaktný.

Dôsledok

Hausdorfovský priestor X je kompaktný práve vtedy, keď X je homeomorfný s uzavretým podpriestorom Tichonovovej kocky.

Dôsledok

Topologický priestor X je $T_{3\frac{1}{2}}$ -priestor práve vtedy, keď X je homeomorfný s podpriestorom nejakého kompaktného hausdorfovského priestoru.

Tichonovova veta

Veta (Tichonovova veta)

Ak pre každé $i \in I$ je X_i kompaktný priestor, tak aj topologický súčin $\prod_{i \in I} X_i$ je kompaktný.

Dôsledok

Podpriestor S priestoru $\mathbb{R}^n$ s euklidovskou topológiou je kompaktný práve vtedy, keď je S je uzavretá a ohraničená podmnožina v $\mathbb{R}^n$.

Alexandrova veta o subbáze

Veta (Alexander subbase theorem)

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor a $\mathcal{S}$ je nejaká subbáza topológie $\mathcal{T}$. Priestor $(X, \mathcal{T})$ je kompaktný práve vtedy, keď pre každé pokrytie priestoru X množinami z $\mathcal{S}$ existuje konečné podpokrytie.

Interval $I = \langle 0, 1 \rangle$ s obvyklou topológiou je kompaktný. Máme subbázu $\mathcal{S} = \{\langle 0, b \rangle, (a, 1); a, b \in \mathbb{R}\}$.

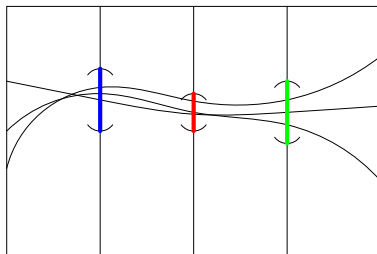
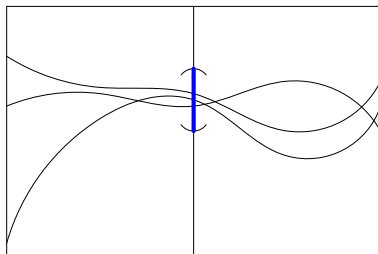
Alexandrova veta o subbáze

- ▶ Nech existuje otvorené pokrytie, ktoré nemá konečné podpokrytie.
- ▶ Zornova lema: Existuje maximálne otvorené pokrytie $\mathcal{C}$ s touto vlastnosťou.
- ▶ Systém $\mathcal{C} \cap \mathcal{S}$ nie je pokrytie. Existuje bod x nepokrytý množinou z $\mathcal{C} \cap \mathcal{S}$
- ▶ Potom $x \in U \in \mathcal{C}$. A $x \in S_1 \cap \dots \cap S_n \subseteq U$, kde $S_1, \dots, S_n \in \mathcal{S}$.
- ▶ Z maximality: $\mathcal{C} \cup \{S_i\}$ má konečné podpokrytie. Teda $X \setminus S_i \subseteq \bigcup C_i$.

$$X \setminus U \subseteq X \setminus \bigcap_{i=1}^n S_i = \bigcup_{i=1}^n (X \setminus S_i) \subseteq \bigcup_{i=1}^n \bigcup C_i$$

- ▶ Teda $\mathcal{F} = \{U\} \cup \bigcup_{i=1}^n C_i$ je konečné podpokrytie pokrytia $\mathcal{C}$.

Súčinová topológia



Dôkaz Tichonovovej vety

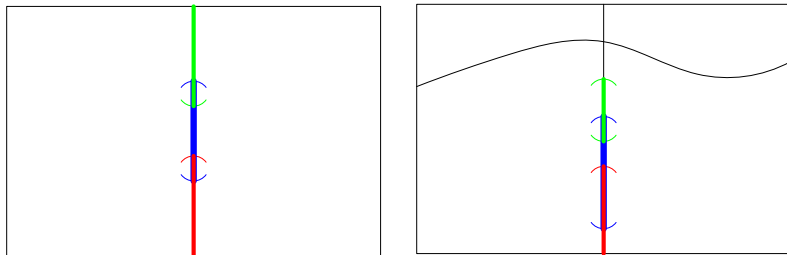


Figure: Dve možné situácie, ktorými sa zaoberáme v dôkaze Tichonovovej vety: Buď máme na niektorej súradnici pokrytie celého X_i , alebo vieme nájsť funkciu, ktorá nepatrí do žiadnej množiny z pokrytia

Dôkaz Tichonovovej vety – pomocou filtrov

- ▶ Nech $f: M \rightarrow X$ a $\mathcal{U}$ je ultrafilter na množine M .
- ▶ Chceme ukázať existenciu $\mathcal{U}$ -lim f .
- ▶ Máme $p_i \circ f: M \rightarrow X_i$, pričom X_i je kompaktné.

$$x_i \in \mathcal{U}\text{-lim}(p_i \circ f)$$

$$(\forall i \in I) p_i(x) = x_i$$

$$x \in \mathcal{U}\text{-lim } f$$

Kompaktné množiny a súčiny

Tvrdenie

Nech $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ sú topologické priestory, $A \subseteq X$ a $B \subseteq Y$ sú ich kompaktné podmnožiny. Ak $O \subseteq X \times Y$ je otvorená množina v $X \times Y$ obsahujúca $A \times B$, tak existujú otvorené množiny $U \in \mathcal{T}_X$, $V \in \mathcal{T}_Y$ také, že

$$A \times B \subseteq U \times V \subseteq O.$$

Dôsledok

Nech X , Y sú topologické priestory, X je kompaktný. Ak $y \in Y$ a O je otvorená množina v $X \times Y$ taká, že $X \times \{y\} \subseteq O$, tak existuje otvorená podmnožina V priestoru Y taká, že

$$X \times \{y\} \subseteq X \times V \subseteq O.$$

Kompaktné množiny a súčiny

Dôsledok

Nech X, Y sú topologické priestory, X je kompaktný. Ak $y \in Y$ a O je otvorená množina v $X \times Y$ taká, že $X \times \{y\} \subseteq O$, tak existuje otvorená podmnožina V priestoru Y taká, že

$$X \times \{y\} \subseteq X \times V \subseteq O.$$

Tvrdenie

Nech X, Y sú topologické priestory, X je kompaktný. Potom projekcia $p_Y: X \times Y \rightarrow Y$ je uzavreté zobrazenie.